CoLP-TdS - XXVes - 13/11/2008

Titolo nota [redacted]

8. (Es. 4.25 e 4.26 da Antonelli-Regoli) Il condomino Rossi della porta accanto è un accanito giocatore del lotto ed ha deciso di giocare sulla ruota di Torino il numero 13 fino a quando non esce fra i cinque numeri estratti. Sia X il numero di giocate del Sig. Rossi.

(a) trovare la distribuzione di X

Prove ripetute

– sotto le stesse condizioni

– indipendenza fra prove

– Prob. successo uguale.

Ad ogni prova: successo (esce 13) / insuccesso (non esce)

$P(\text{successo}) = \frac{\text{c. fav}}{\text{c. poss.}} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$

– le prove sono indipendenti.

Siamo interessati:

X = la prima prova nella quale si ha successo (esce il 13)

$X \sim \text{Geom}(p) \quad p = \frac{1}{18}$

(b) Calcolare $P(X = 10)$ e $P(X > 10)$

$$P(X = i) = (1-p)^{i-1} p$$

quindi

$$P(X = 10) = \left(1 - \frac{1}{18}\right)^{10-1} \frac{1}{18} =$$

$$= \left(\frac{17}{18}\right)^{9} \frac{1}{18} \simeq 0.0332$$

$$P(X > 10) = P(\text{i primi 10 lanci sono insuccessi})$$

$$= (1-p)^{10} = \left(1 - \frac{1}{18}\right)^{10} = \left(\frac{17}{18}\right)^{10} \simeq 0.5646$$

(c) Calcolare la media e la varianza di X

$$X \sim Geom(p) \quad E(X) = \frac{1}{p} \quad Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

$$p = \frac{1}{18} \qquad E(X) = \frac{1}{\frac{1}{18}} = 18$$

$$Var(X) = \frac{1-\frac{1}{18}}{\left(\frac{1}{18}\right)^2} = \frac{\frac{17}{18}}{1/18^2} = \frac{17}{\cancel{18}} \cdot (18)^{\cancel{2}} = 306$$

(d) Il Sig. Rossi punta 10 euro ogni volta e vince 100 euro se esce il 13. Qual è il suo guadagno atteso? E la varianza di tale guadagno?

Una volta vinto, il sig. Rossi esce dal gioco

Costo: # scommesse · Costo di una scommessa

$= X \cdot 10$

Ricavo: 100

Guadagno: Y = Ricavo − Costo =

$= 100 - 10 \cdot X$

$E(Y) = ?$ $\quad Var(Y) = ?$

$Y = 100 - 10X$ è una trasformazione lineare di X

Possiamo ricavare $E(Y)$ e $Var(Y)$ da $E(X)$ e $Var(X)$

Ricordo che

$E(aX+b) = aE(X)+b$

$Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

Allora $E(Y) = E(-10X+100) =$

$= -10E(X)+100 = -10 \cdot 18 + 100 =$

$= -180 + 100 = -80$ Non è una scommessa equa

$Var(Y) = Var(-10X+100) = (-10)^2 Var(X)$

$= 100 \cdot 306 = 30600$

7. Un gioco fra due controparti è detto equo se il valore atteso del guadagno per entrambe le parti è nullo.

   (a) Supponiamo che Tom e Jerry lancino un dado e Tom paghi 5 dollari a Jerry nel caso il punteggio sia minore di 3. Quanto dovrebbe pagare Jerry (a Tom) se il punteggio è almeno pari a 3 affinché il gioco risulti equo?

X = guadagno di Jerry

$X \in \{-c, 5\}$.

Trova c in modo che il gioco sia equo.

Distribuzione di X

$P(X=5) = P(\text{Jerry Vince}) =$

$P(\text{dado} < 3) = P(\text{dado è } 1 \text{ o } 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(X=-c) = P(\text{Jerry Perde}) = P(\text{dado} \geq 3) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

x	$-c$	5
$p(x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Determino c affinchè $E(X)=0$

$E(X) = (-c)\frac{2}{3} + 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{-2c+5}{3}$

$E(X) = \frac{-2c+5}{3} = 0 \Rightarrow -2c+5=0$

ovvero $c = \frac{5}{2}$

(b) Come cambia la risposta se, nel caso il dado sia 3, non avviene nessun pagamento?

Z = guadagno di Jerry nella nuova situazione

$$Z \in \{-c, 0, 5\}$$

Dado

	4,5,6	3	1,2
Z	$-c$	0	5
$p(Z)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

$$E(Z) = (-c)\frac{1}{2} + 0\frac{1}{6} + 5\frac{1}{3} = -\frac{c}{2} + \frac{5}{3}$$

$$= \frac{-3c+10}{6} = 0 \qquad -3c+10=0$$

$$c = \frac{10}{3}$$

10. Giovanni deve sottoporsi ad un esame e può scegliere fra due diverse procedure:

- Nel primo test viene sottoposto a 5 domande a risposta chiusa, in ciascuna delle qual~~e~~i deve scegliere la risposta corretta fra tre disponibili. Il test viene superato se risponde ad almeno 2 ~~risposte~~ domande in modo corretto
- Nel secondo test viene sottoposto ad una prima domanda nella quale deve scegliere fra tre alternative. Se indovina passa il test, altrimenti viene sottoposto ad una seconda domanda con tre alternative. Ancora una volta se indovina il test finisce, altrimenti si continua con una terza domanda e così via fino a quando viene data la prima risposta corretta. Il test si conclude con successo se viene data la prima risposta corretta entro le prime tre domande. Si assume che il test continui comunque fino alla prima risposta esatta.

Supponendo che Giovanni sia totalmente impreparato e che risponda casualmente ad ogni quesito, e che gli esiti di ogni quesito siano fra loro indipendenti si indichi con

$X =$ numero di risposte esatte nel primo test

$Y =$ posizione della prima risposta esatta nel 2° test.

(a) Indicare se X e Y seguono qualche distribuzione discreta conosciuta;

1° procedura.

5 prove ripetute, nelle stesse condizioni e indipendenti

P(successo ad ogni prova) =

P(ottenere la casella giusta su 3) $= \frac{1}{3}$

\# prove $= 5$

X = \# risposte esatte = \# successi nelle 5 prove

$$X \sim Bin\left(5, \frac{1}{3}\right)$$

Secondo test..

\# prove non è prefissato

le prove sono indipendenti e nelle stesse condizioni

P(successo) $= P$(ottenere risposta giusta su 3) $= \frac{1}{3}$

Y = Prova nella quale avviene il 1° successo

$$Y \sim \mathrm{Geom}\left(\frac{1}{3}\right)$$

(b) Calcolare $E(X)$, $E(Y)$ e $\mathrm{Var}(X)$ $\mathrm{Var}(Y)$

$$X \sim \mathrm{Bin}\left(n=5,\ p=\frac{1}{3}\right)$$

$$E(X) = n \cdot p = 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\mathrm{Var}(X) = n\,p\,(1-p) = 5 \cdot \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right) = 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$$

$$Y \sim \mathrm{Geom}\left(p=\frac{1}{3}\right) \quad E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 1 \cdot 3 = 3$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{9}} = \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \cancel{9}^{\,3} = 6$$

(c) Calcolare, in termini rispettivamente di X e Y, la probabilità che Giovanni superi i due test. Quale test conviene scegliere a Giovanni?

Il 1° test è superato se $X \geq 2$

$$P(\text{superare il 1° test}) = P(X \geq 2) =$$

$$X \sim Bin\left(5, \frac{1}{3}\right)$$

$$= P\left((X<2)^c\right) = 1 - P(X<2) =$$

$$1 - \left(P(X=0) + P(X=1)\right) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$$

$$P(X=i) = \binom{5}{i}\left(\frac{1}{3}\right)^i\left(\frac{2}{3}\right)^{5-i}$$

$$P(X=0) = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5 = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{32}{243}\right) = \frac{32}{243}$$

$$P(X=1) = \binom{5}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^4 = 5\,\frac{1}{3}\cdot\frac{16}{81} = \frac{80}{243}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - \frac{32}{243} - \frac{80}{243} = \frac{243-32-80}{243}$$

$$= \frac{131}{243} \simeq 0.5390$$

$P(\text{supera } 2^\circ \text{ test}) = P(Y \leq 3) =$

$P(Y=1) + P(Y=2) + P(Y=3) =$

$$\left(P(Y=i) = (1-p)^{i-1} p \right) \qquad p = \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} =$$

$$= \frac{9+6+4}{27} = \frac{19}{27} \simeq 0.703$$

oppure

$$P(Y \leq 3) = P\left((Y>3)^c\right) = 1 - P(Y>3)$$

$$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 - \frac{8}{27} = \frac{27-8}{27} = \frac{19}{27}$$

Il secondo test è più facile

3. Una macchina produce accendini e ciascun pezzo prodotto ha probabilità 5/6 di essere funzionante, indipendentemente dagli altri pezzi.

   (a) Sono stati prodotti 6 pezzi. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi

   - A = tutti i 6 pezzi sono funzionanti;
   - B = esattamente 5 pezzi sono funzionanti;

- C = almeno uno dei 6 pezzi è difettoso

(b) Sapendo che nei primi 6 almeno un pezzo risulta difettoso, calcolare la probabilità che esattamente 4 di questi pezzi siano funzionanti.

$X = \#$ pezzi funzionanti

$$X \sim Bin\left(6, \frac{5}{6}\right)$$

$$P(A) = P(X=6) = \binom{6}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^6\left(\frac{1}{6}\right)^0$$

$$= 1\left(\frac{15625}{46656}\right)1 \simeq 0.3348$$

$$P(B) = P(X=5) = \binom{6}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^5\left(\frac{1}{6}\right)^1$$

$$= 6\left(\frac{5}{6}\right)^5\frac{1}{6} = \frac{18750}{46656} \simeq 0.40187$$

$$P(C) = P(X \leq 5) = P\left((X>5)^c\right) =$$

$$= P\left((X=6)^c\right) = 1 - P(X=6) \simeq 1 - 0.3348$$

$$= 0.6652$$

(b) $P(X=4 \mid X \leq 5) = \dfrac{P(X=4, X \leq 5)}{P(X \leq 5)}$

$= \dfrac{P(X=4)}{P(X \leq 5)}$

$P(X=4) = \binom{6}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \dfrac{\overset{3}{\cancel{6}} \cdot 5}{\cancel{2}} \dfrac{5^4}{6^6}$

$= \dfrac{9375}{46656} \simeq 0.20093$

$P(X=4 \mid X \leq 5) = \dfrac{P(X=4)}{P(X \leq 5)} \simeq \dfrac{0.20093}{0.6652}$

$\simeq 0.30207$

12. (Epifani) Se partecipo a 180 concorsi ~~[illegible]~~ diversi (e indipendenti), in ciascuno dei quali si vince un solo premio e per ciascuno dei quali la probabilità di vincere il premio è 0.008, quanto vale (approssimativamente) la probabilità;

(a) di vincere il premio di un solo concorso;

180 prove, - nelle stesse condizioni

b) ad ogni prova < successo (vince) / insuccesso

c) $P(\text{successo}) = 0.008$ (sempre la stessa)

d) le prove sono indipendenti

$X = \#$ successi

$X \sim Bin(n = 180, p = 0.008)$

$n = 180$ "elevato" $p = 0.008$ "basso"

per approssimare X conviene usare

$$Y \sim Po(\lambda)$$

$$\lambda = np = (180)(0.008) = 1.44$$

(a) di vincere il premio di un solo concorso;

Esatto: $P(X=1) = \binom{180}{1}(0.008)^1(0.992)^{179}$

Approx: $P(Y=1) = e^{-1.44}\dfrac{(1.44)^1}{1!} =$

$$e^{-1.44}(1.44) \simeq 0.341$$

(b) di vincere almeno un premio;

esatto: $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$

$$= 1 - \binom{180}{0}(0.008)^0(0.992)^{180}$$

Approx: $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0)$

$$= 1 - e^{-1.44} \frac{(1.44)^0}{0!}$$

$$= 1 - e^{-1.44} \cdot \frac{1}{1} \simeq 1 - 0.237 = 0.763$$

(c) di vincere 30 premi

esatto $P(X = 30) = \binom{180}{30} (0.008)^{30} (0.992)^{150}$

approx: $P(Y = 30) = e^{-1.44} \frac{(1.44)^{30}}{30!} = \ldots$

La funzione di distribuzione della variabile aleatoria X è definita da

$$F(\cancel{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1/2 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 2/3 & \text{se } 1 \le x < 2 \\ 11/12 & \text{se } 2 \le x < 3 \\ 1 & \text{se } 3 \le \cancel{X} \end{cases}$$

(a) Disegnare la funzione di distribuzione; (per ore)

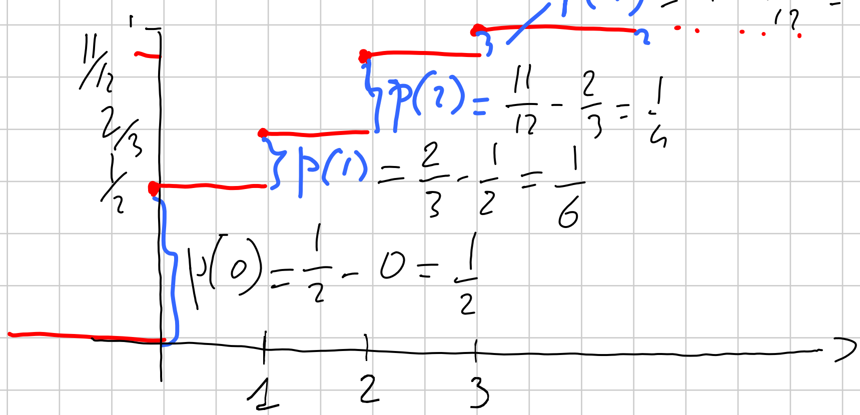
(b) Quanto vale $P(X \le 2)$?

$$P(X \le 2) = F(2) = \frac{11}{12}$$

(c) Determinare la densità discreta di X

(d) Trovare la media e la varianza di X

la densità discreta è data dai valori dei salti della funzione di distribuzione



$$p(0) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$p(1) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$p(2) = \frac{11}{12} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}$$

$$p(3) = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$$

x	0	1	2	3
$p(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$