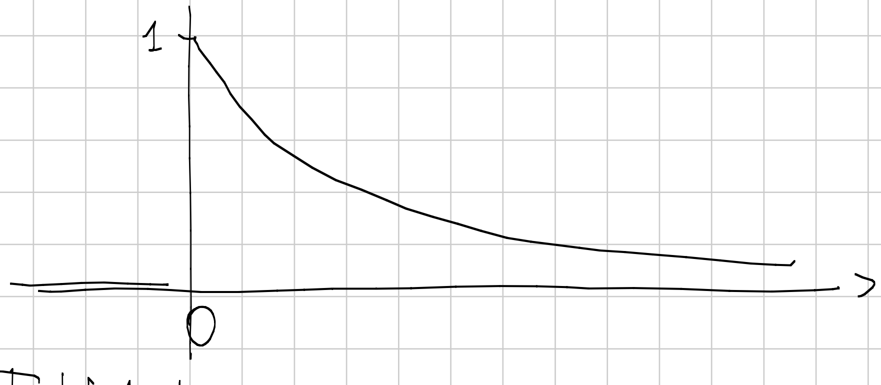
CdCP – XXXIV – 4/12/2008

Titolo nota 22/11/2007

Variabile aleatoria (v.a.) continua esponenziale è definita dalla densità.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE

$$F(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\, dx \quad \left[\cancel{\lambda}\left(\frac{1}{-\cancel{\lambda}} e^{-\lambda x}\right)\right]_0^a =$$

$$= \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^a = -e^{-\lambda a} - \left(-e^{-\lambda 0}\right) =$$

$$= -e^{-\lambda a} - (-1) = 1 - e^{-\lambda a}$$

Quindi $F(a) = 1 - e^{-\lambda a}$

Quindi: per calcolare

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\, dx = \dots$$

oppure

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

$$1 - e^{-\lambda b} - \left(1 - e^{-\lambda a}\right) =$$

$$= \cancel{1} - e^{-\lambda b} - \cancel{1} + e^{-\lambda a} = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

Inoltre si dimostra che

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Esempio 5b. Supponiamo che la lunghezza di una telefonata in minuti sia una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda = \frac{1}{10}$. Se qualcuno arriva immediatamente prima di voi alla cabina telefonica, determinare la probabilità di dover aspettare

(a) più di 10 minuti;

X = durata della telefonata (in minuti)

$$X \sim Exp\left(\frac{1}{10}\right) \qquad \lambda = \frac{1}{10}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{10}} = 1 \cdot 10 = 10$$

$$P(X > 10) = \int_{10}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10}x}\,dx \ldots$$

SCORCIATOIA

$$P(X > 10) = P\left((X \leq 10)^c\right) =$$

$$1 - P(X \le 10) = 1 - F(10) =$$

$$= 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{\cancel{10}}\cdot\cancel{10}}\right) = \cancel{1} - \cancel{1} + e^{-1} = e^{-1}$$

$$= \frac{1}{e} \simeq \frac{1}{2.71} \simeq 0.368$$

(b) tra 10 e 20 minuti.

$$P(10 < X < 20) = \int_{10}^{20} \frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10}x} dx = \dots$$

OPPURE

$$P(10 < X < 20) = P(X < 20) - P(X \le 10) =$$

$$= P(X \le 20) - P(X \le 10) = F(20) - F(10)$$

$$= 1 - e^{-\frac{1}{\cancel{10}}\cdot\cancel{20}^{\,2}} - \left(1 - e^{-\frac{1}{\cancel{10}}\cdot\cancel{10}}\right) =$$

$$= \cancel{1} - e^{-2} - \cancel{1} + e^{-1} = e^{-1} - e^{-2}$$

$$= \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} \simeq 0.233$$

32. Il tempo (in ore) richiesto per riparare un macchinario è una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda = \frac{1}{2}$. Qual è

(a) la probabilità che la riparazione duri più di 2 ore;

X = durata (in ore) della riparazione

$$X \sim Exp\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$$

$$= 1 - F(2) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}}\right) =$$

$$= \cancel{1} - \cancel{1} + e^{-1} = \frac{1}{e} \simeq 0.368$$

(b) la probabilità condizionata che la riparazione duri più di 10 ore sapendo che la sua durata supera le 9 ore?

$$P(\underbrace{X > 10}_{A} \mid \underbrace{X > 9}_{B}) = \frac{P(A\,B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P((X > 10) \cap (X > 9))}{P(X > 9)} =$$

$$= \frac{P(X>10)}{P(X>9)} = \frac{1-P(X\le 10)}{1-P(X\le 9)} =$$

$$= \frac{1-F(10)}{1-F(9)} = \frac{1-\left(1-e^{-\frac{1}{2}10}\right)}{1-\left(1-e^{-\frac{1}{2}9}\right)} =$$

$$= \frac{\cancel{1}-\cancel{1}+e^{-5}}{\cancel{1}-\cancel{1}+e^{-\frac{9}{2}}} = \frac{\frac{1}{e^5}}{1/\sqrt{e^9}} = \frac{1}{e^5}\cdot\sqrt{e^9} =$$

$$= \frac{\sqrt{e^9}}{\sqrt{e^{10}}} = \sqrt{\frac{\cancel{e^9}}{e^{\cancel{10}\,1}}} = \sqrt{\frac{1}{e}} \simeq 0.6066$$

Confronto con

$$P(X>1) = 1-P(X\le 1) = 1-F(1)$$

$$= 1-\left(1-e^{-\frac{1}{2}\cdot 1}\right) = \cancel{1}-\cancel{1}+e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\simeq 0.6066$$

Nel caso specifico

$$P(X > 10 \mid X > 9) = P(X > 1)$$

$$P\left(\begin{array}{l}\text{dobbiamo aspettare}\\ \text{almeno un'altra}\\ \text{ora dato che}\\ \text{ho già aspettato 9 ore}\end{array}\right) = P\left(\begin{array}{l}\text{aspettare}\\ \text{almeno}\\ \text{un'ora}\\ \text{all'inizio}\end{array}\right)$$

Il risultato è vero in generale:

se s e t sono tali che

$s > 0$ e $t \geq 0$

allora se $X \sim Exp(\lambda)$

$$P(X > s+t \mid X > t) = P(X > s)$$

PROPRIETÀ DI MANCANZA DI MEMORIA

(O MANCANZA DI USURA)

13. Arrivi alla fermata dell'autobus alle 10, sapendo che l'istante di arrivo dell'autobus è uniformemente distribuito tra le 10 e le 10:30.

(a) Qual è la probabilità che tu debba aspettare più di 10 minuti?

X = tempo di attesa per l'autobus (in minuti)

$X \sim \mathrm{Unif}(0, 30)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30-0} = \frac{1}{30} & \text{se } x \in [0, 30] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$P(X > 10) = P(10 < X \leq 30) =$$

$$= (\text{amp. int.}) \times \text{densità} = (30 - 10)\frac{1}{30} =$$

$$= \frac{20}{30} = \frac{2}{3} \simeq 0.667$$

(b) Se l'autobus non è ancora passato alle 10:15, qual è la probabilità di dover aspettare altri 10 minuti?

$$P(X > 15 + 10 \mid X > 15) = P(X > 25 \mid X > 15)$$

$$= \frac{P(X>25, X>15)}{P(X>15)} = \frac{P(X>25)}{P(X>15)} =$$

$$= \frac{P(25 < X \leq 30)}{P(15 < X \leq 30)} = \frac{\begin{pmatrix} \text{amp} \\ \text{int} \end{pmatrix} \times \text{densità}}{\begin{pmatrix} \text{amp.} \\ \text{int.} \end{pmatrix} \times \text{dens.}}$$

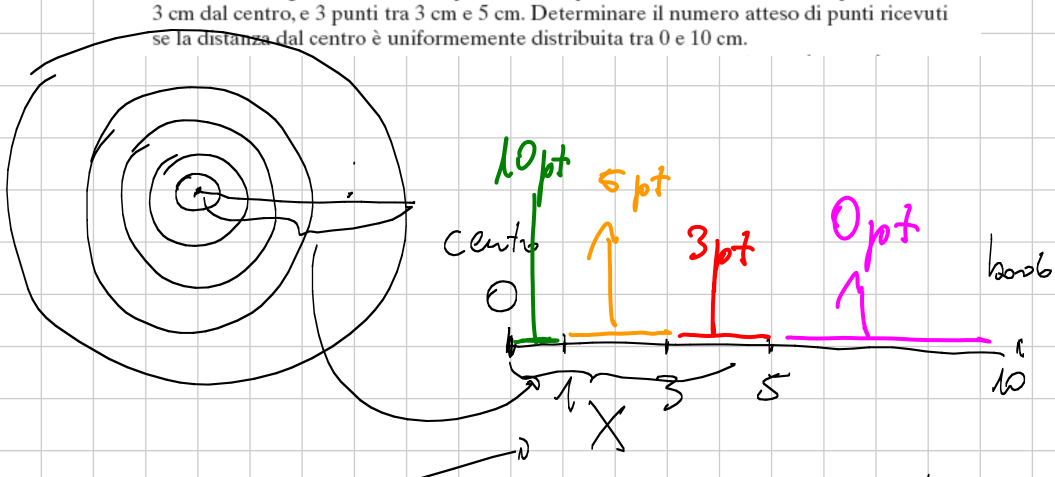
$$= \frac{(30-25)\cancel{\frac{1}{30}}}{(30-15)\cancel{\frac{1}{30}}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$P(X>10) \qquad\qquad P(X>25 \mid X>15)$$

$$\frac{2}{3} \neq \frac{1}{3}$$

LA PROPRIETÀ DI MANCANZA DI MEMORIA NON È PRESENTE

17. Al tiro al bersaglio si ricevono 10 punti se si colpisce entro 1 cm dal centro, 5 punti tra 1 e 3 cm dal centro, e 3 punti tra 3 cm e 5 cm. Determinare il numero atteso di punti ricevuti se la distanza dal centro è uniformemente distribuita tra 0 e 10 cm.



X = distanza (in cm.) del mio tiro dal centro $\quad X \sim \mathrm{Unif}(0,10)$

Y = punteggio ottenuto (Y dipende da X) V.a. discreta

$Y \in \{0, 3, 5, 10\}$

distribuzione.

$$P(Y=0) = P(5 < X \leq 10)$$

X ha densità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{se} \quad x \in [0, 10] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$P(5 < X \leq 10) = \begin{pmatrix} \text{ampl.} \\ \text{int.} \end{pmatrix} \times \text{densità} = (10-5) \cdot \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Dunque $P(Y=0) = \frac{1}{2}$

$$P(Y=3) = P(3 < X \leq 5) = (5-3) \cdot \frac{1}{10} = 2\,\frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

$$P(Y=5) = P(1 < X \leq 3) = (3-1) \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$P(Y=10)=P(0\leq X\leq 1)=$$

$$=(1-0)\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{10}$$

In conclusione

y	0	3	5	10
$p(y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

$$E(Y)=0\,\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{5}+5\,\frac{1}{5}+10\,\frac{1}{10}$$

$$=\frac{3}{5}+1+1=\frac{3+5+5}{5}=\frac{13}{5}=2.6$$