CdP-TdD - XXXVII es - 11/12/2008

Titolo nota 11/12/2008

foglio 6

2. La ditta Xanadu importa in U.S.A. delle grandi quantità di silicio per micro processori dalla Zeldonia. Può decidere se acquistare subito 1000 tonnellate di silicio al prezzo di 5000 $ alla tonnellata. Conta di rivendere

. . . .

(b) Cambia l'esito se si considera la seguente funzione di utlità al posto dei pagamenti monetari?

$$u(x) = 3x - \frac{x^2}{2}$$

dove x è il pagamento in milioni di dollari.

la funzione $u(x) = 3x - \frac{x^2}{2}$ è una parabola

$$u(x) = -\frac{x^2}{2} + 3x + 0$$

$a = -\frac{1}{2}$ $b = 3$ $c = 0$

il vertice è in $x^* = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = 3$

$$u(x^*) = -\frac{3^2}{2} + 3(3) = -\frac{9}{2} + 9 = \frac{9}{2}$$

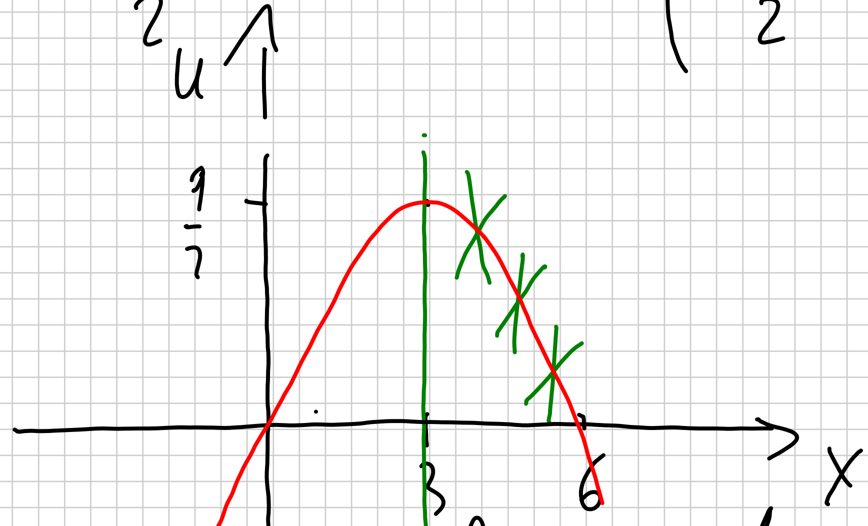
- parabola rivolta verso il basso

intersezioni con gli assi

$$-\frac{x^2}{2}+3x=0 \qquad x\left(-\frac{x}{2}+3\right)=0$$

$x=0$

$-\frac{x}{2}+3=0 \Rightarrow x=6$



questa funzione di utilità

Viene considerata solo per valori di $x \leq 3$ ($\leq$ dell'ascissa del vertice)

Attenzione: la funzione di utilità non è normalizzata (non è vero che $u(V_{min})=0$, $u(V_{max})=1$)

Tuttavia la procedura rollback però

essere utilizzate ugualmente.

—— o —— 3 —— o ——

Elenco i pagamenti

$-1, \; 0, \; 3$

Calcolo le utilità dei pagamenti

$$u(x) = 3x - \frac{x^2}{2}$$

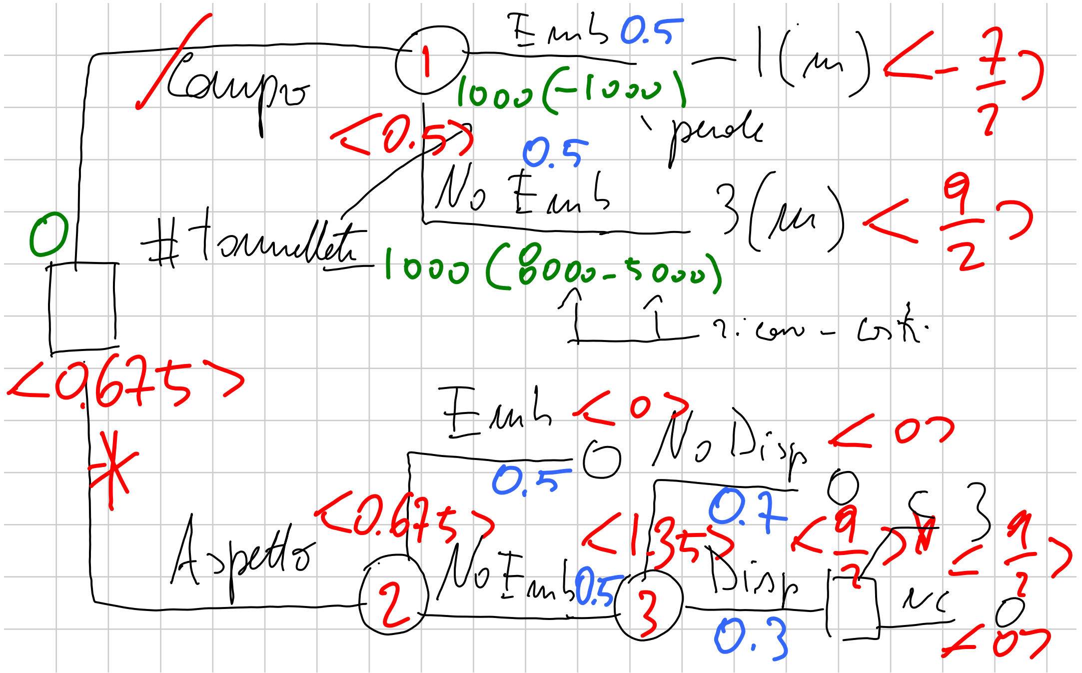
$$u(-1) = 3(-1) - \frac{(-1)^2}{2} = -3 - \frac{1}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$u(0) = 3(0) - \frac{(0)^2}{2} = 0$$

$$u(3) = 3(3) - \frac{3^2}{2} = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

Attenzione: rispetto alla prima parte dell'

Esercizio consideriamo i pagamenti in milioni di dollari



$E(1) = \left(-\frac{7}{2}\right)(0.5) + \frac{9}{2}(0.5) =$

$= (-3.5)(0.5) + (4.5)(0.5) =$

$= -1.75 + 2.25 = 0.5$

$E(3) = 0(0.7) + (4.5)(0.3) = 1.35$

$E(2) = 0(0.5) + (1.35)(0.5) = 0.675$

Esito: Aspetto. Poi nel caso lo merce

ho ancora disponibile, compro la merce.

Flow programme 1. Eq. cert?

$u(x) = 3x - \frac{x^2}{2}$ (da questa ricavo x in funzione di u)

$u = 3x - \frac{x^2}{2} \qquad \frac{x^2}{2} - 3x + u = 0$

$a = \frac{1}{2} \quad b = -3 \quad c = u$

Applico la formula $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4\left(\frac{1}{2}\right)u}}{2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{3 \pm \sqrt{9-2u}}{1} =$$

$$= 3 \pm \sqrt{9-2u} \left\langle \begin{array}{l} 3+\sqrt{9-2u} \\ 3-\sqrt{9-2u} \quad (*) \end{array} \right.$$

Considero il valore (*) perché sono interessato

a valori di $x \leq 3$ (parte ascendente della parabola)

$$x = 3 - \sqrt{9-2u}$$

$$x = 3 - \sqrt{9-2(0.675)} = 3 - \sqrt{7.65} \simeq$$
$$\simeq 0.234$$

CE

$$RP = EV - CE = 1 - 0.234 \simeq 0.765$$

5. Enrico deve mettere quattro lettere in quattro buste con l'indirizzo. Se le mette a caso, determinare la distribuzione della v.a. X = "numero di lettere nella busta giusta". Calcolare $E(X)$, $\mathrm{Var}(X)$. Enrico riceve 10 euro per ogni lettera imbustata correttamente ed arrivata a destinazione (mentre non riceve niente per le lettere nelle buste sbagliate). Calcolare valore atteso e varianza del guadagno di Enrico.

foglio 5

Buste	a	b	c	d
Lettere	A	B	C	D

le lettere sono messe a caso nelle buste

Ogni allocazione darà luogo ad una delle $4! = 24$ possibili permutazioni

a	b	c	d	lett giuste	a	b	c	d	
A	B	C	D	4	B	A	C	D	2
A	B	D	C	2	B	A	D	C	0
A	C	B	D	2	B	C	A	D	1
A	C	D	B	1	B	C	D	A	0
A	D	B	C	1	B	D	A	C	0
A	D	C	B	2	B	D	C	A	1

a	b	c	d	
C	A	B	D	1
C	A	D	B	0
C	B	A	D	2
C	B	D	A	1
C	D	A	B	0
C	D	B	A	0

a	b	c	d	
D	A	B	C	0
D	A	C	B	1
D	B	A	C	1
D	B	C	A	2
D	C	A	B	0
D	C	B	A	0

Conteggio di coo

0	1	2	3	4	tot
9	8	6	0	1	24

Ogni permutazione ha uguale prob.
quindi $X = \#$ lettere al posto giusto
ha distribuzione

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	$9/24$	$8/24$	$6/24$	0	$1/24$

Altro

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{24}$

Calcolo $E(X)$, $Var(X)$

$$E(X) = 0\cdot\frac{3}{8} + 1\left(\frac{1}{3}\right) + \cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{4}_{2}}\right) + 3\cdot 0 + \cancel{4}\frac{1}{\cancel{24}_{6}}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2+3+1}{6} = 1$$

$$E(X^2) = 0^2\cdot\frac{3}{8} + 1^2\,\frac{1}{3} + 2^2\,\frac{1}{4} + 3^2\cdot 0 + 4^2\,\frac{1}{24}$$

$$= \frac{1}{3} + 1 + \frac{\cancel{16}^{2}}{\cancel{24}_{3}} = \frac{2+6+4}{6} = 2$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2 - 1^2 =$$

$$= 2 - 1 = 1$$

Guadagno di Enzio $Z = 10X$

$$E(Z) = E(10X) = 10E(X) = 10 \cdot 1 = 10$$

$$Var(Z) = Var(10X) = (10)^2 Var(X) = 100 \cdot 1 = 100$$

Flow programme. Cosa succede se Enrico guadagna 10 € per ogni lettera giusta e perde 5 € per ogni lettera sbagliata?

$$Y = 10X - 5(4 - X) = 10X - 20 + 5X$$

$$= 15X - 20$$

$$E(Y) = E(15X - 20) = 15E(X) - 20 =$$

$$15 \cdot 1 - 20 = -5$$

$$Var(Y) = Var(15X - 20) = (15)^2 Var(X)$$

$$= 225 \cdot 1 = 225$$

9. Il punteggio ottenuto dagli studenti alla prova scritta di un esame universitario si può modellizzare con una variabile aleatoria normale di media 21 e varianza 9. Qual è la percentuale di studenti che hanno ottenuto un voto superiore o uguale al 24 (e minore o uguale di 30)? Qual è la percentuale di studenti che ha ottenuto un voto inferiore o uguale al 17?

foglio 7

$X =$ voto $\quad X \sim N(21, 9)$

$$P(24 \leq X \leq 30) =$$

$$= P\left(\frac{24-21}{\sqrt{9}} \leq \frac{X-21}{\sqrt{9}} \leq \frac{30-21}{\sqrt{9}}\right)$$

$$= P\left(\frac{3}{3} \leq Z \leq \frac{9}{3}\right) = P(1 \leq Z \leq 3) =$$

Var. aleatoria standardizzata $Z \sim N(0,1)$

$$= P(Z \leq 3) - P(Z \leq 1) = \Phi(3) - \Phi(1)$$

(Φ funz. di distr. di $Z \sim N(0,1)$)

Ricavo i valori di Φ dalle seguenti tabelle.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
…										
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
…										
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995

$\Phi(1) = \Phi(1.00)$

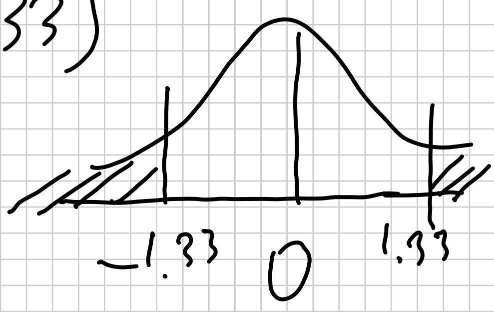
$\Phi(3) = \Phi(3.00)$

$$P(24 \le X \le 30) = \Phi(3) - \Phi(1) \simeq 0.9987 - 0.8413 = 0.1574$$

$$P(X \le 17) = P\left(\frac{X-21}{\sqrt{9}} \le \frac{17-21}{\sqrt{9}}\right) =$$

$$= P\left(Z \le \frac{-4}{3}\right) = P(Z \le -1.33)$$

$$= \Phi(-1.33) = 1 - \Phi(1.33)$$



Cerco il valore di $\Phi(1.33)$ nelle tabelle

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319

$\Phi(1.33)$

$$P(X \le 17) = 1 - \Phi(1.33) \simeq 1 - 0.9082$$
$$= 0.0918$$

10. Arrivo alla fermata dell'autobus alle 9, sapendo che l'istante di arrivo dell'autobus è uniformemmente distribuito nei 20 minuti successivi.

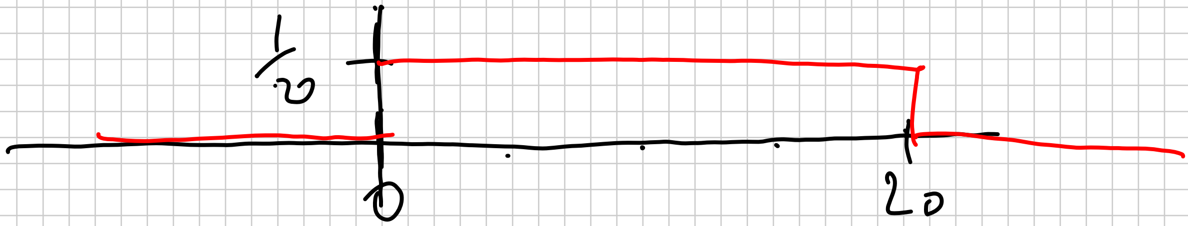
    (a) Qual è la probabilità di dovere aspettare più di 5 minuti?

    (b) Se l'autobus non è passato nei primi 10 minuti, qual è la probabilità di dover aspettare altri 5 minuti, ovvero che l'autobus arrivi dopo le 9.15?

X = minuti (dopo le 9) che dobbiamo aspettare per l'arrivo dell'autobus

$X \sim Unif(0,20)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20} x & 0 \le x \le 20 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



$$P(X>5) = P(5 < X \leq 20) =$$

(Amp. intervallo) $\times$ (densità) =

$$(20-5)\cdot\frac{1}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

(b) Se l'autobus non è passato nei primi 10 minuti, qual è la probabilità di dover aspettare altri 5 minuti, ovvero che l'autobus arrivi dopo le 9.15?

$$P(X>15 \mid X>10) =$$

$$= \frac{P(X>15, X>10)}{P(X>10)} = \frac{P(X>15)}{P(X>10)}$$

$$P(X>15) = P(15 < X \leq 20) =$$

$(\text{Amp int.}) \times (\text{densità}) = (20-15)\dfrac{1}{20} =$

$= \dfrac{5}{20} = \dfrac{1}{4}$

$P(X>10) = P(10 < X \leq 20) =$

$= (20-10) \cdot \dfrac{1}{20} = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2}$

$P(X>15 \mid X>10) = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{4} \cdot 2 = \dfrac{1}{2}$