

ColP-TeD-VI - 1/10/2002

Titolo nota

### Più in generale

Se in  $n$  elementi ci sono  $r$  elementi indistinguibili

$$\text{num. permutazioni} = \frac{n!}{r!}$$

**Esempio 3d.** Quanti sono gli anagrammi di PEPPEP?

Ci interessa gli anagrammi  
di PEPPEP senza che

Ovvero memorizziamo  
genus (anagrammi)

# anagrammi senza GI = 720

in realtà è più alla  
lettera che non distinguibili.

Se potessi distinguere le  $n$  P  
e le  $n$  E allora gli anagrammi

$$\text{do } P_1 E_1 P_2 P_3 E_2 R \quad \# \text{nd} = 6! = 720$$

in words: no river & distinguish  
 & requests orderments

$P_1 P_2 E_1 P_3 E_2 R$	$P_1 P_2 E_2 P_3 E_1 R$
$P_1 P_3 E_1 P_2 E_2 R$	$P_1 P_3 E_2 P_2 E_1 R$
$P_2 P_1 E_1 P_3 E_2 R$	$P_2 P_1 E_2 P_3 E_1 R$
$P_2 P_3 E_1 P_1 E_2 R$	$P_2 P_3 E_2 P_1 E_1 R$
$P_3 P_1 E_1 P_2 E_2 R$	$P_3 P_1 E_2 P_2 E_1 R$
$P_3 P_2 E_1 P_1 E_2 R$	$P_3 P_2 E_2 P_1 E_1 R$

permutations  
 the no river  
 & distinguish.

$$\# = \# \text{ orderments of } P$$

$$\# \text{ orderments of } E$$

$$\Rightarrow \# \text{ words of permutations } E \times \# \text{ words of permutations } P$$

$$= 3! \times 2! = 6 \times 2 = 12$$

$2 =$  permutations words

$3! \cdot 2! =$  permutations words per  
 each permutation words

$6! =$  permutations words

$$6! = 2 (3!2!)$$

$$2 = \frac{6!}{3!2!} = \frac{720}{6 \cdot 2} = \frac{720}{12} = 60$$

↳ *Il risultato è vero in generale*

Se un insieme di  $n$  elementi contiene  $r_1$  elementi di un tipo indistinguibili fra di loro,  $r_2$  elementi di un secondo tipo indistinguibili fra di loro e così via fino a  $r_k$  elementi del tipo  $k$  indistinguibili fra di loro, il numero di permutazioni osservabili è dato da

$$\frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}$$

$$\text{con } r_1 + r_2 + \dots + r_n = n$$

**Esempio 3e.** In un torneo di scacchi vi sono 10 concorrenti: 4 russi, 3 statunitensi, 2 inglesi e 1 brasiliano. Se la classifica finale indica soltanto nell'ordine la nazionalità dei giocatori, quanti sono gli esiti possibili?

$$\begin{array}{l}
 M = 10 \text{ countries} \\
 N_1 = 4 \text{ cont. Russ.} \\
 N_2 = 3 \text{ cont. USA} \\
 N_3 = 2 \text{ cont. UK} \\
 N_4 = 1 \text{ cont. BRA}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} M \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{array}} \right\} \# \text{ ord} = \frac{10!}{4!3!2!1!} =$$

$$\begin{array}{r}
 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\
 \hline
 \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{1} \\
 \hline
 = 12600
 \end{array}$$

### Definizione

Il numero di modi in cui posso disporre  $k$  elementi da un insieme di  $n$ , tenendo conto dell'ordine, è detto **disposizioni di  $n$  elementi di classe  $k$**  o disposizioni di  $n$  elementi tra  $k$  o disposizioni di  $n$  elementi presi a  $k$  a  $k$ . Tale numero è dato da

$$D_{nk} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

## Esamples Quant: Numbers

do to eifre pono formore

Con gli interi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9  
 a number efre può essere più di uno?

D<sub>M</sub>n con  $n=9$   $k=5$

$$D_{95} = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 15120$$

— 0 — 0 — 0 — 0 —

5 lettere A, B, C, D, E

puto le lettere in un pacchetto  
e le estrogo 3

2 tipi di estrogo

1°) estrogo le lettere alle volte  
(senza limite delle lettere)

(estrogo senza limitazioni)

$$\# \text{ estrogo} = D_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

2°) estrogo le 3 lettere esattamente  
(E S T M A T O R E in Blocco)

# estoroni = ?

nel metodo 2°) non conta  
L'ordine D E S T R A T T O R E

Ad es: suppongo di aver scritto  
con il metodo 2° la lettera A D E  
nel metodo 1° le sequenti estoroni  
vergo entro ai districamenti

(A, D E) (A, E, D) (D, A, E) } 6  
(D, E, A) (E, A, D) (E, D, A) }

nel metodo 2° non conta  
l'ordine! Le 6 estoroni  
del metodo 1° entrano come 1 sola

# estoroni = # estoroni metodo 1°  
metodo 2° = # estoroni delle stesse lettere  
various e ordine

$$\Rightarrow \frac{60}{6} = 10$$

Più in generale:  $k$  oggetti,

we extract  $k$  ( $k \leq n$ ) Now

CONSIDERANDO L'ORDINE

# estrazioni possibili = # estrazioni <sup>d: k oggetti:</sup> multisets l'ordine

# estrazioni degli  
oggetti **(k)**  
versos le soluzioni

$$\Rightarrow \frac{\binom{m}{k}}{k!} = \frac{\frac{m!}{(m-k)!}}{k!} = \frac{m!}{(m-k)! k!}$$

$$C_{nk} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad \begin{array}{l} \text{COMBINAZIONI} \\ \text{DI } n \text{ ELEMENTI} \\ \text{DI CLASSE } k \end{array}$$

$$\binom{n}{k} = C_{nk} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad \text{" } n \text{ n } k \text{"}$$

КОМБИНАЦИИ  
В КЛАССЕ

**Esempio 4a.** Si vuole formare un comitato di 3 persone scelte tra 20 persone. Quanti sono i comitati possibili?

Esistono  $d.$  3  $n$ ominativi:  $d$ o 20  
Non contando l'ordine

$$C_{20,3} = \binom{20}{3} = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{20!}{3!17!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 17!} = 1140$$



Empiris  $L_1$  dan  $L_2$

$$\text{jumlah di } U \text{ total: } \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3!} \cdot \cancel{4!}} = 35$$

jumlah elemen:  $(L_1 L_2 X)$

$X$  selho in  $U_1 U_2 U_3 U_4 U_5$

# jumlah elemen = # cara di bagian 1 ( $X$ )

$$\text{di } 5(U_1 U_2 U_3 U_4 U_5) = \binom{5}{1} = \frac{5 \cdot \cancel{4!}}{1! \cdot \cancel{4!}} = \frac{5 \cdot \cancel{4!}}{1 \cdot \cancel{4!}} = 5$$

# jumlah U mini = # jumlah total:  $U =$

# jumlah elemen =  $35 - 5 = 30$

# jumlah total = # cara  $D$  · # cara  $U$

$$= \binom{5}{2} \times 30 = 10 \cdot 30 = 300$$

**P.T.C.C.**

**Demonstrasi:** # jumlah  $U$  per cara  
cara lain elemen

# jumlah senne  $U_1$ ,  $U_2$

$$3 \text{ permutazioni di } U_1 U_2 U_3 U_4 U_5 = \binom{5}{3} = 10$$

+

# esattori con 1 dei due litigianti ( $L_1, L_2$ )

senza antenari b:

$\underbrace{U_1 U_2 U_3 U_4 U_5}_{2} \quad \underbrace{L_1 L_2}_{1}$

$$\binom{5}{2} \times \binom{2}{1} = 10 \cdot 2 = 20$$

**Esempio 4c.** Si considerano  $n$  antenne,  $m$  delle quali sono difettose e le altre  $n - m$  sono funzionanti. Supponendo che tutte le antenne difettose e quelle funzionanti siano indistinguibili fra loro, in quanti modi esse possono essere allineate senza che due antenne difettose siano consecutive?

Contare tutte le sequenze con

$m$   $U$   $0$   $U$  (antenne difettose)

$n - m$   $1$   $U$   $1$  (antenne funzionanti)

tal che due  $U$  e i zeri due

o  $U$   $0$   $U$  esentarsi

1 1 1 0 1 0 1 1 1 0 1

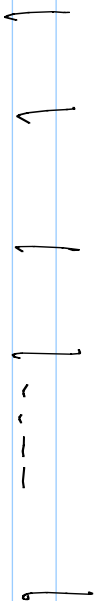
✓

1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1

X

Per contare i sistemi funzionali

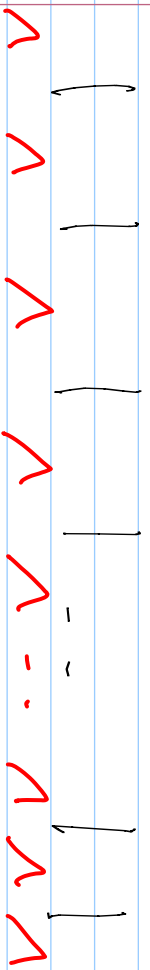
1°)  $n$  "fiori" e  $m$  "auteme" funzionali.



2°)  $n$  "piatto" e  $m$  "auteme"

di fatto per qu'elle funzionali in modo da mettere al lavoro

Una fra due auteme funzionali



Però prima us "0" nelle posizioni  
oggetti de  $\wedge$

- Dove mettere le auteme nelle posizioni disponibili

# positioni disponibili =

# antenne funzionali  $k \leq l \leq n-k+1$ .

Devo scegliere  $n$  posizioni

fra le  $n-k+1$  disponibili

$$C_{n-k+1, n} = \binom{n-k+1}{n}$$

Well! esempio iniziale

$$n=4 \quad m=2$$

# antenne funzionali =

$$\binom{n-k+1}{m} = \binom{4-2+1}{2} = \binom{3}{2}$$

$$= \frac{3!}{2!1!} = \frac{3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!} \cdot 1} = 3$$

Quark's mass is distributed in total  
(Flavorless or low fluctuation)?