CdP - TdD - VI - 1/10/2003

Titolo nota [redacted]

Più in generale

Se in n elementi ci sono r elementi indistinguibili

$$\text{num. permutazioni} = \frac{n!}{r!}$$

Esempio 3d. Quanti sono gli anagrammi di $PEPPER$?

(si intendono gli ordinamenti di PEPPER senza che abbiano necessariamente senso compiuto)

\# anagrammi sarebbe $6! = 720$

in realtà ci sono delle lettere che sono indistinguibili.

Se potessi distinguere le "P" e le "E" dovrei fare l'anagramma di $P_1 E_1 P_2 P_3 E_2 R$ $\# \text{ord} = 6! = 720$

in molti non riesco a distinguere i seguenti ordinamenti

$P_1 P_2 E_1 P_3 E_2 R$	$P_1 P_2 E_2 P_3 E_1 R$
$P_1 P_3 E_1 P_2 E_2 R$	$P_1 P_3 E_2 P_2 E_1 R$
$P_2 P_1 E_1 P_3 E_2 R$	$P_2 P_1 E_2 P_3 E_1 R$
$P_2 P_3 E_1 P_1 E_2 R$	$P_2 P_3 E_2 P_1 E_1 R$
$P_3 P_1 E_1 P_2 E_2 R$	$P_3 P_1 E_2 P_2 E_1 R$
$P_3 P_2 E_1 P_1 E_2 R$	$P_3 P_2 E_2 P_1 E_1 R$

permutazioni che non riesco a distinguere.

$\# = \#$ ordinam. di P $\times$ $\#$ ordin. di E

$= \#$ modi di permutare le P $\times$ $\#$ modi di permutare le E

$= 3! \times 2! = 6 \times 2 = 12$

e = permutazioni visibili

$3! \cdot 2!$ = permutazioni nascoste per ogni permutazione visibile

$6!$ = permutazioni totali

$$6! = a\,(3!\,2!)$$

$$a = \frac{6!}{3!\,2!} = \frac{720}{6 \cdot 2} = \frac{720}{12} = 60$$

Il risultato è vero in generale

Se un insieme di n elementi contiene r_1 elementi di un tipo indistinguibili fra di loro, r_2 elementi di un secondo tipo indistinguibili fra di loro e così via fino a r_k elementi del tipo k indistinguibili fra di loro, il numero di permutazioni osservabili è dato da

$$\frac{n!}{r_1!\, r_2! \cdots r_k!}$$

con $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = n$

Esempio 3e. In un torneo di scacchi vi sono 10 concorrenti: 4 russi, 3 statunitensi, 2 inglesi e 1 brasiliano. Se la classifica finale indica soltanto nell'ordine la nazionalità dei giocatori, quanti sono gli esiti possibili?

$n = 10$ concorrenti

$n_1 = 4$ conc. russi

$n_2 = 3$ conc. USA

$n_3 = 2$ conc UK

$n_4 = 1$ conc BRA

$$\# \text{ord} = \frac{10!}{4!\,3!\,2!\,1!} = \frac{\cancel{10}^{5} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{3 \cdot 2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{1}} = 12600$$

Definizione

Il numero di modi in cui posso disporre k elementi da un insieme di n, tenendo conto dell'ordine, è detto disposizioni di n elementi di classe k o disposizioni di n elementi tra k o disposizioni di n elementi presi a k a k. Tale numero è dato da

$$D_{nk} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Esempio: Quanti numeri di 5 cifre posso formare con gli interi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 se nessuna cifra può apparire più di 1 volta?

$D_{n,k}$ con $n=9$ $k=5$

$$D_{9,5} = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 15120$$

— o — o — o —

5 lettere A, B, C, D, E

Metto le lettere in un sacchetto e ne estraggo 3

2 tipi di estrazione

1°) estraggo una lettera alla volta (senza rimetterla dentro)
(estrazione senza rimpiazzo)

$\#$ estrazioni $= D_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

2°) estraggo le 3 lettere contemporaneamente
(ESTRAZIONE IN BLOCCO)

estrazioni = ?

nel metodo 2°) non conta
L'ORDINE DI ESTRAZIONE

Ad es: supponiamo di aver estratto
con il metodo 2° le lettere A D E
nel metodo 1° le seguenti estrazioni
vengono contate distintamente

$$\left.\begin{matrix}(A, D, E) & (A, E, D) & (D, A, E) \\ (D, E, A) & (E, A, D) & (E, D, A)\end{matrix}\right\} 6$$

nel metodo 2° non conta
l'ordine! le 6 estrazioni
del metodo 1° contano come 1 sola

$$\#\text{estrazioni metodo } 2° = \frac{\#\text{estrazioni metodo } 1°}{\#\text{estrazioni delle stesse lettere variando l'ordine}}$$

$$= \frac{60}{6} = 10$$

Più in generale: n oggetti, ne estraggo k ($k \leq n$) NON CONSIDERANDO L'ORDINE

$$\#\text{estrazioni possibili} = \frac{\overbrace{\#\text{estrazioni contando l'ordine}}^{\text{di } k \text{ oggetti}}}{\#\text{estrazioni degli stessi oggetti } (k) \text{ non contando l'ordine}}$$

$$= \frac{D_{nk}}{P_k} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!}\,\frac{1}{k!}$$

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$ COMBINAZIONI DI n ELEMENTI DI CLASSE k

$$\binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$ "n su k"

COEFFICIENTE BINOMIALE

Esempio 4a. Si vuole formare un comitato di 3 persone scelte tra 20 persone. Quanti sono i comitati possibili?

Estrazione di 3 nominativi da 20 non contando l'ordine

$$C_{20,3} = \binom{20}{3} = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{20!}{3!\,17!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot \cancel{18}^{3} \cdot \cancel{17!}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{17!}}$$

$$= 1140$$

Esempio 4b. Quanti comitati composti da 2 donne e 3 uomini si possono formare da un gruppo di 5 donne e 7 uomini? [redacted]

esperimento

1° sotto esp. — Scelgo 2 D da 5

2° sotto esp. — Scelgo 3 U da 7

NON CONTA L'ORDINE.

$$C_{5,2} = \binom{5}{2} \quad \times \quad C_{7,3} = \binom{7}{3}$$

P.F. Calc. Comb.

$$\# \text{ comitati} = \binom{5}{2} \times \binom{7}{3} = \frac{5!}{2!\,3!} \cdot \frac{7!}{3!\,4!} =$$

$$= \frac{5 \cdot \cancel{4}^{2} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{2}\ \cancel{3!}} \cdot \frac{7\ \cancel{6} \cdot 5\ \cancel{4!}}{\cancel{6}\ \cancel{4!}} = 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 5 = 350$$

[redacted] Quanti sono i comitati se 2 uomini che hanno litigato rifiutano di sedere insieme nel comitato?

1° sottoesperimento non cambia $\binom{5}{2}$

2° sottoesp $\quad U_1\, U_2\, U_3\, U_4\, U_5\, L_1\, L_2$

Dal numero totale dei comitati $\binom{7}{3}$

dobbiamo sottrarre i comitati in cui

Compaiono L_1 ed L_2

comitati di U totali $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cancel{4!}}{\cancel{3!}\, \cancel{4!}} = 35$

comitati esclusi : $(L_1 L_2 x)$

x scelto in $U_1\ U_2\ U_3\ U_4\ U_5$

comitati esclusi = # modi di sceglierne 1 (x) da 5 $(U_1, U_2, U_3, U_4, U_5) = \binom{5}{1} = \frac{5!}{1!\,4!} = \frac{5\,\cancel{4!}}{1\,\cancel{4!}}$

$= 5$

comitati U ammissibili = # comitati totali U −
comitati esclusi $= 35 - 5 = 30$

comitati totali = # com D · # com U

$= \binom{5}{2} \times 30 = 10 \cdot 30 = 300$

P.F.C.C.

Osservazione: # comitati U può essere calcolato considerando

comitati senza né L_1 né L_2

3 prendo da $U_1 U_2 U_3 U_4 U_5$ = $\binom{5}{3} = 10$

+

contati con 1 dei due litiganti (L_1 o L_2) senza entrambi: $\underbrace{U_1 U_2 U_3 U_4 U_5}_{2}$ $\underbrace{L_1 L_2}_{1}$

$\binom{5}{2} \times \binom{2}{1} = 10 \cdot 2 = 20$

Esempio 4c. Si considerano n antenne, m delle quali sono difettose e le altre $n - m$ sono funzionanti. Supponendo che tutte le antenne difettose e quelle funzionanti siano indistinguibili fra loro, in quanti modi esse possono essere allineate senza che due antenne difettose siano consecutive?

Contare tutte le sequenze con

m "0" (antenne difettose)

n−m "1" (antenne funzionanti)

tali che non ci siano due o più "0" consecutivi

1 1 1 0 1 0 1 1 1 0 1 ✓

1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 ✗

Per contare i sistemi funzionanti

1°) "fisso" le n−m antenne funzionanti

| | | | .... |

2°) "piazzo" le m antenne difettose fra quelle funzionanti in modo da mettere al massimo

una fra due antenne funzionanti

| | | | ... | |

∧ ∧ ∧ ∧ ∧ ... ∧ ∧ ∧

posso piazzare uno "0" nelle posizioni segnate da ∧

- Devo mettere m antenne nelle posizioni disponibili

posizioni disponibili =
antenne funzionanti + 1 = $n-m+1$.

Devo scegliere m posizioni fra le $n-m+1$ disponibili

$$C_{n-m+1,m} = \binom{n-m+1}{m}$$

Nell' esempio iniziale

$n = 4 \quad m = 2$

sistemi funzionanti =

$$\binom{n-m+1}{m} = \binom{4-2+1}{2} = \binom{3}{2}$$

$$= \frac{3!}{2!\,1!} = \frac{3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}\,1} = 3$$

Quanti sono i sistemi in totale (funzionanti e non funzionanti)?