CdP - TdD - VII - ES - 2/10/2008

Titolo nota

In uno spazio campionario sono dati due eventi A, B di cui sono note $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{6}$, $P(AB) = \frac{1}{12}$. Calcolare $P(A \setminus B)$, $P(A^c)$, $P(B^c)$, $P(B(A)^c)$, $P(A^c \cup B^c)$

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(AB) = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{3-1}{12} = \frac{1}{6}$$

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$P(BA^c) = P(B \setminus A) = P(B) - P(AB) =$$
$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{2-1}{12} = \frac{1}{12}$$

$$P(A^c \cup B^c) \underset{\text{De Morgan}}{=} P((AB)^c) = 1 - P(AB) =$$
$$= 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

2. Siano A,B e C tre eventi dello spazio campionario S disgiunti a due a due e tali che $A \cup B \cup C = S$. Indicare se dalle seguenti funzioni si può costruire una probabilità:

(a) $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{6}$, $P(C) = \frac{7}{12}$

(b) $P(A) = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $P(B) = \frac{1-\sqrt{2}}{3}$, $P(C) = \frac{2}{3}$

(c) $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{5}{6}$, $P(C) = \frac{7}{12}$

(d) $P(A) = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $P(B) = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$, $P(C) = \frac{1}{3}$

(i) Devo verificare che

$$0 \le P(A), P(B), P(C) \le 1$$

(Assioma 1)

(ii) Devo anche verificare che

$$1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ass 2}}}{=} P(S) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{testo}}}{=} P(A \cup B \cup C) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Disgiunti}}}{=} P(A) + P(B) + P(C)$$

(a) $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{6}$, $P(C) = \frac{7}{12}$

(i) OK ✓

(ii) $P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{7}{12} = \frac{3+2+7}{12} = \frac{12}{12} = 1$ ✓

(b) $P(A) = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $P(B) = \frac{1-\sqrt{2}}{3}$, $P(C) = \frac{2}{3}$

$P(A) = \frac{\sqrt{2}}{3} \simeq \frac{1.41}{3} \in [0,1]$ ✓

$P(B) = \frac{1-\sqrt{2}}{3} \simeq \frac{1-1.41}{3} = \frac{-0.41}{3} < 0$ NO

(c) $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{5}{6}$, $P(C) = \frac{7}{12}$

(1) OK (ii) $P(A)+P(B)+P(C) = \frac{1}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{12} =$

$= \frac{3+10+7}{12} = \frac{20}{12} \neq 1$ NO

(d) $P(A) = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $P(B) = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$, $P(C) = \frac{1}{3}$ SI

(1) $P(A) = \frac{\sqrt{2}}{3} \simeq \frac{1.41}{3}$ ✓ $P(B) = \frac{2-\sqrt{2}}{3} \simeq \frac{2-1.41}{3} = \frac{0.59}{3}$ ✓

$P(C) = \frac{1}{3}$ ✓ ✓

(ii) $P(A)+P(B)+P(C) = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2-\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3} =$

$= \frac{\cancel{\sqrt{2}}+2-\cancel{\sqrt{2}}+1}{3} = \frac{3}{3} = 1$ ✓

NEL CASO DI ESITI ELEMENTARI EQUIPROBABILI:

se $E \subset S$

$$P(E) = \frac{(\text{n° elementi di } E)}{(\text{n° elementi di } S)} =$$

$$= \frac{\text{casi favorevoli all'evento } E}{\text{casi possibili}}$$

4. Si lancia 4 volte una moneta bilanciata. (T o C)

(a) Definire lo spazio campionario S

$S = \{(TTTT), (TTTC), (TTCT), (TTCC), (TCTT), (TCTC), (TCCT), (TCCC), (CTTT), (CTTC), (CTCT), (CTCC), (CCTT), (CCTC), (CCCT), (CCCC)\}$

Spazio campionario di 16 esiti elementari equiprobabili.

(b) Rappresentare i seguenti eventi come sottoinsiemi di S

$$A = \{\text{la prima } T \text{ esce al terzo lancio}\}$$

$A = \{(CCTT), (CCTC)\}$

$$B = \{\text{escono due } T \text{ e due } C\}$$

$B = \{(TTCC), (TCTC), (TCCT),$

$(CTTC), (CTCT), (CCTT)\}.$

$D = \{C$ al primo lancio T all'ultimo lancio (e qualsiasi esito negli altri lanci)$\}$

$D = \{(CCCT), (CCTT), (CTCT)$
$(CTTT)\}$

(c) Calcolare la probabilità di

$$A \quad B \quad D \quad AB \quad A \cup B \quad ABD \quad A \cup B \cup D$$

$$P(A) = \frac{\#\text{casi fav.(ad } A)}{\#\text{casi poss}} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

$$P(B) = \frac{\#\text{casi fav a } B}{\#\text{casi poss}} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$P(D) = \frac{\#\text{casi fav a } D}{\#\text{casi poss}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$AB =$ la 1° T al 3° lancio $\underline{\underline{e}}$ 2T e 2C $=$

$= \{(CCTT)\}$ $\quad P(AB) = \frac{1}{16}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) =$

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} - \frac{1}{16} = \frac{2+6-1}{16} = \frac{7}{16}$$

$ABD = (1^\circ\ T$ al 3° lancio$)$ $\underset{=}{e}$ $(2T$ e $2C)$

$\underset{=}{e}$ $(C$ al 1° lancio, T al $4^\circ) = \{(CCTT)\}$

$$P(ABD) = \frac{1}{16}$$

$P(A \cup B \cup D) = ?$ per applicare la formula generale devo trovare ancora $P(BD)$ e $P(AD)$

$BD = (2T$ e $2C)$ $\underset{=}{e}$ $(C$ al 1° lancio, T al $4^\circ)$

$= \{(CCTT), (CTCT)\}$ $\quad P(BD) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

$AD = (1^\circ\ T$ è al 3° lancio$)$ $\underset{=}{e}$ $(C$ al 1°, T al $4^\circ)$

$= \{(CCTT)\}$ $\quad P(AD) = \frac{1}{16}$

Applico la formula generale

$$P(A \cup B \cup D) = P(A) + P(B) + P(D) - P(AB) - P(AD) - P(BD) + P(ABD) =$$

$$= \cancel{\frac{1}{8}} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \cancel{\frac{1}{16}} - \cancel{\frac{1}{8}} + \cancel{\frac{1}{16}} =$$

$$= \frac{6+4-1}{16} = \frac{9}{16}$$

13. Una città con 100 000 abitanti ha 3 quotidiani: I, II e III. La percentuale di lettori di questi giornali è la seguente:

I: 10 per cento	I e II: 8 per cento	I e II e III: 1 per cento
II: 30 per cento	I e III: 2 per cento	
III: 5 per cento	II e III: 4 per cento	

(La precedente lista ci dice, per esempio, che 8000 persone leggono sia il I che il II quotidiano).

(a) Si trovi il numero di persone che leggono un solo quotidiano.

L_1 = lettori del I giornale

L_2 = lettori del II giornale

L_3 = lettori del III giornale

— o — o — o —

Se mettiamo in un'urna i nominativi dei cittadini ed estraiamo casualmente 1 nominativo

$P(L_1) = 0.10$ $P(L_2) = 0.30$ $P(L_3) = 0.05$

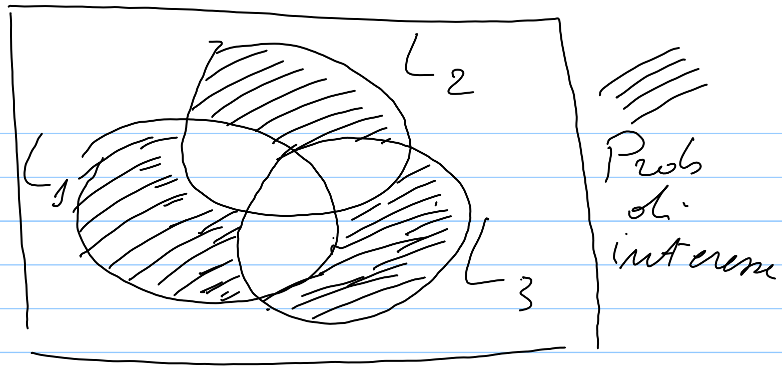
$P(L_1 L_2) = 0.08$ $P(L_1 L_3) = 0.02$

$P(L_2 L_3) = 0.04$ $P(L_1 L_2 L_3) = 0.01$

(a) Si trovi il numero di persone che leggono un solo quotidiano.

ALMENO un quotidiano $\Rightarrow L_1 \cup L_2 \cup L_3$

non va per l'esercizio



Prob di interesse

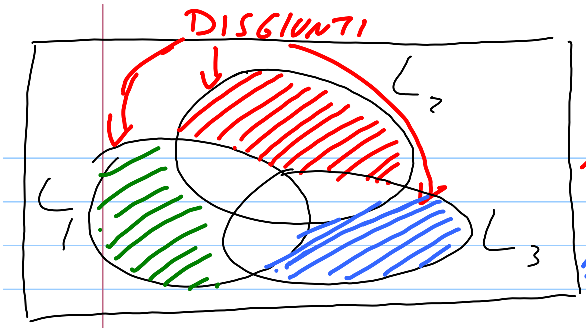
2 metodi

1) Legge almeno un quot ma non ne legge almeno 2

$$(L_1 \cup L_2 \cup L_3) \setminus (L_1L_2 \cup L_1L_3 \cup L_2L_3)$$

2) $(L_1 L_2^c L_3^c) \cup (L_1^c L_2 L_3^c) \cup (L_1^c L_2^c L_3)$

DISGIUNTI.



$L_1 L_2^c L_3^c$

$L_1^c L_2 L_3^c$

$L_1^c L_2^c L_3$

$$P(L_1 L_2^c L_3^c \cup L_1^c L_2 L_3^c \cup L_1^c L_2^c L_3) =$$

$$= P(L_1 L_2^c L_3^c) + P(L_1^c L_2 L_3^c) + P(L_1^c L_2^c L_3)$$

$$L_1 L_2^c L_3^c = L_1 (L_2^c L_3^c) =$$

$$L_1 (L_2 \cup L_3)^c = L_1 \setminus (L_2 \cup L_3)$$

$$P(L_1 \setminus (L_2 \cup L_3)) = P(L_1) - P(L_1 (L_2 \cup L_3))$$

$$= P(L_1) - P(L_1 L_2 \cup L_1 L_3) =$$

$$= P(L_1) - (P(L_1 L_2) + P(L_1 L_3) -$$

$$- P((L_1 L_2)(L_2 L_3)))$$

$$= P(L_1) - \left(P(L_1L_2) + P(L_1L_3) - P(L_1L_2L_3)\right)$$

$$= P(L_1) - P(L_1L_2) - P(L_1L_3) + P(L_1L_2L_3)$$

$$= 0.10 - 0.03 - 0.02 + 0.01 = 0.01$$

Similmente

$$P(L_1^c L_2 L_3^c) = P(L_2) - P(L_1L_2) - P(L_2L_3) + P(L_1L_2L_3) = 0.3 - 0.08 - 0.04 + 0.01$$

$$= 0.19$$

$$P(L_1^c L_2^c L_3) = P(L_3) - P(L_1L_3) - P(L_2L_3) + P(L_1L_2L_3) = 0.05 - 0.02 - 0.04 + 0.01$$

$$= 0$$

$P(\text{leggere un solo quotidiano}) =$

$$= P(L_1 L_2^c L_3^c) + P(L_1^c L_2 L_3^c) + P(L_1^c L_2^c L_3) = 0.01 + 0.19 + 0 = 0.20$$

persone della città che leggono un solo giornale: 20% di 100000 = 100000 · 0.20
= 20000

(b) Quante persone leggono almeno 2 quotidiani?

$P(A \setminus B)$ dove

A = "leggono almeno un quotidiano"
$= L_1 \cup L_2 \cup L_3$

B = "leggono esattamente un quotidiano"
= trovato nel punto precedente

$B \subset A \implies P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$

$$P(A)=P(L_1 \cup L_2 \cup L_3)=P(L_1)+P(L_2)$$
$$+P(L_3)-P(L_1L_2)-P(L_1L_3)-P(L_2L_3)$$
$$+P(L_1L_2L_3)=0.10+0.30+0.05$$
$$-0.08-0.02-0.04+0.01=$$
$$0.32$$

$P(B)=$ (vedi punto precedente) $=0.20$

$P(\text{almeno 2 giornali})=P(A)-P(B)=0.32-0.20$

$=0.12$

nelle cittadine $(100000)(0.12)=12000$
persone leggono almeno due quotidiani