CoCP - TdD - Xa - 9/10/2008

Titolo nota [redacted]

**13.** Una città con 100 000 abitanti ha 3 quotidiani: I, II e III. La percentuale di lettori di questi giornali è la seguente:

| | | |
|---|---|---|
| I: 10 per cento | I e II: 8 per cento | I e II e III: 1 per cento |
| II: 30 per cento | I e III: 2 per cento | |
| III: 5 per cento | II e III: 4 per cento | |

(La precedente lista ci dice, per esempio, che 8000 persone leggono sia il I che il II quotidiano).

**(b)** Quante persone leggono almeno 2 quotidiani?

Vista la volta scorsa

**(c)** Se I e III sono quotidiani del mattino e II della sera, quanti leggono almeno un quotidiano del mattino oltre al quotidiano della sera?

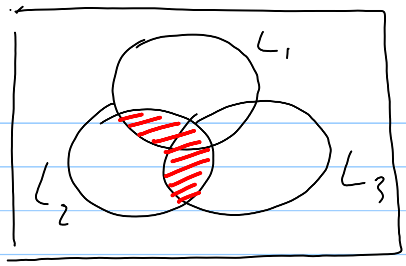
leggo II e (leggo I o leggo III)

in termini di insiemi

$$L_2(L_1 \cup L_3) =$$

$$L_1L_2 \cup L_2L_3$$

$$P(L_1L_2 \cup L_2L_3) = ?$$




$$P(L_1L_2 \cup L_2L_3) = P(L_1L_2) + P(L_2L_3)$$

$$- P((L_1L_2)(L_2L_3)) =$$

— o —

$$(L_1L_2)(L_2L_3) = L_1(L_2L_2)L_3 = L_1L_2L_3$$

— o —

$$P(L_1L_2 \cup L_2L_3) = P(L_1L_2) + P(L_2L_3)$$

$$- P(L_1L_2L_3) = 0.08 + 0.04 - 0.01 = 0.11$$

Lettori $= 100000(0.11) = 11.000$

**(d)** Quanti non leggono nessun giornale?

Non leggo nessun giornale =

Non leggo I e Non leggo II e Non Leggo III =

$= L_1^c L_2^c L_3^c = (L_1 \cup L_2 \cup L_3)^c$

De Morgan

$P((L_1 \cup L_2 \cup L_3)^c) = 1 - P(L_1 \cup L_2 \cup L_3) =$

$= 1 - (P(L_1) + P(L_2) + P(L_3) - P(L_1 L_2)$
$- P(L_1 L_3) - P(L_2 L_3) + P(L_1 L_2 L_3))$
$= 1 - P(L_1) - P(L_2) - P(L_3) + P(L_1 L_2)$
$+ P(L_1 L_3) + P(L_2 L_3) - P(L_1 L_2 L_3) =$
$= 1 - 0.1 - 0.3 - 0.05 + 0.03 + 0.02 + 0.04$
$- 0.01 = 0.68$ | Lettori $= 100000(0.68) = 68000$

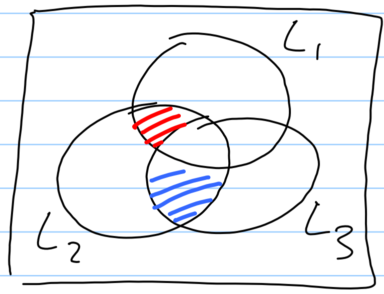
**(e)** Quanti leggono un solo quotidiano del mattino e uno della sera?

(un solo quotidiano del mattino) $\equiv$ uno delle sere

$$(L_1 L_3^c \cup L_1^c L_3) L_2 =$$

$$L_1 L_2 L_3^c \cup L_1^c L_2 L_3$$

disgiunti




$$P(L_1 L_2 L_3^c \cup L_1^c L_2 L_3) =$$

$$= P(L_1 L_2 L_3^c) + P(L_1^c L_2 L_3) =$$

$$P(L_1 L_2 L_3^c) = P((L_1 L_2) L_3^c) = P(L_1 L_2 \setminus L_3)$$

$$= P(L_1 L_2) - P(L_1 L_2 L_3) = 0.08 - 0.01 =$$

$$= 0.07$$

$$P(L_1^c L_2 L_3) = P(L_2 L_3 L_1^c) = P(L_2 L_3 \setminus L_1)$$

$$= P(L_2 L_3) - P(L_1 L_2 L_3) = 0.04 - 0.01 =$$

$$= 0.03$$

$$P(L_1 L_2 L_3^c \cup L_1^c L_2 L_3) = 0.07 + 0.03 = 0.1$$

Lettori $= 100000(0.1) = 10000$

Scorciatoia :

$\text{Prob}(\text{punto } c) - P(L_1 L_2 L_3) =$

$= 0.11 - 0.01 = 0.1$

8. Un comitato di tre persone viene scelto a caso da un gruppo di 6 persone: $a, b, c, d, f$ e
   (a) Specificare uno spazio campionario $S$ composto da esiti equiprobabili;

a b c d e f

$S = \{abc, abd, abe, abf, acd, ace, acf, ade, adf, aef, bcd, bce, bcf, bde, bdf, bef, cde, cdf, cef, def\}$

(b) Trovare la probabilità che:
   i. sia scelto $a$;

$A = a \text{ è scelto} = \{abc, abd, abe, abf, acd, ace, acf, ade, adf, aef\}$

$P(A) = \frac{c.\ fav}{c\ pos} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

ii. Sia scelto $b$;

$B =$ è scelto $b$, $B = \{abc, abd, abe, abf, bcd, bce, bcf, bde, bdf, bef\}$

$$P(B) = \frac{c\ fav}{c\ pos} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

iii. Siano scelti $a$ e $b$;

$AB = \{abc, abd, abe, abf\}$

$$P(AB) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

iv. Siano scelti $a$ o $b$;

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

v. $a$ non sia scelto;

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

vi. Non sono scelti né $a$ né $b$;

$$P(A^c B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) =$$

De Morgan

$$1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

9. Un servizio di trasporto privato possiede due auto. L'auto più grande contiene 5 passeggeri, la più piccola 3.

   (a) Descrivere uno spazio campionario $S$ che contenga l'informazione sel numero di passeggeri trasporatati dalle due macchine;

$( \uparrow , \uparrow )$

\# pass. auto grande    \# pass. auto piccola

$$S = \{ (0,0), (0,1), (0,2), (0,3),$$
$$(1,0), (1,1), (1,2), (1,3),$$
$$(2,0), (2,1), (2,2), (2,3),$$
$$(3,0), (3,1), (3,2), (3,3),$$
$$(4,0), (4,1), (4,2), (4,3),$$
$$(5,0), (5,1), (5,2), (5,3) \}$$

D

E

F

esiti in $S = 24$

(b) Consideriamo i seguenti eventi:

**D:** almeno una macchina è vuota;

**E:** le due macchine assieme trasportano 6 passeggeri;

**F:** le due macchine trasportano lo stesso numero di passeggeri.

Assumendo che ogni esito di $S$ sia equiprobabilie, trovare la probabilità dei seguenti insiemi:

$$D \quad E \quad F \quad EF \quad E \cup F \quad DF \quad \cancel{D}\ DEF \quad D \cup E \cup F$$

$$P(D) = \frac{\text{casi fav}}{\text{casi pos}} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

$$P(E) = \frac{\text{c. fav}}{\text{c. pos}} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

$$P(F) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

$$P(DE) = \frac{0}{24} = 0$$

$$P(DF) = \frac{1}{24} \qquad P(EF) = \frac{1}{24}$$

$$P(DEF) = \frac{0}{24}$$

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \frac{3+4-1}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

$$P(D \cup E \cup F) = P(D) + P(E) + P(F)$$

$$- P(DE) - P(DF) - P(EF) + P(DEF)$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} - 0 - \frac{1}{24} - \frac{1}{24} + 0 =$$

$$= \frac{9+3+4-1-1}{24} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$$

10. Quali delle seguenti espressioni sono sempre vere? Quali sono assiomi?

$P((A \cup B)^c) = P(A^c B^c)$ vero $\quad 0 \le P(E) \le 1$ ass $\quad P(A \cup B) = P(A \cap B)$ false

$P(S) = 1$ ass $\quad P(E^c) = 1 - P(E)$ vero $\quad P(\emptyset) > 0$ falso! $\quad P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(AB)$

$P(A \cup B) = P(AB)$ false

esempio: $S = \{1,2\}$ $\quad A = \{1\}$ $\quad B = \{2\}$

$A \cup B = \{1,2\} = S \Rightarrow P(A \cup B) = P(S) = 1$

$AB = \emptyset \Rightarrow P(AB) = 0$

$P(A \cup B) \neq P(AB)$

$$P(A)+P(B)=P(A\cup B)+P(AB)$$

è equivalente a

$$P(A)+P(B)-P(AB)=P(A\cup B)$$

Vero sempre

11. Siano $A$ e $B$ due eventi tali che $P(AB) = 1/4$, $P(A^c) = 1/3$ e $P(B^c) = 1/2$. Trovare $P(A \cup B)$. È vero che $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$? Questo fatto è vero in generale (per qualsiasi scelta di $A$ e $B$)? Sì

Sì (vedi lezione)

$$\boxed{P(A)=1-P(A^c)}$$

Vero perché

$$P(A^c)=1-P(A)$$

quindi $P(A)=1-P(A^c)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$$P(B)=1-P(B^c)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{8+6-3}{12}=\frac{11}{12}$$

$$P(A)+P(B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{4+3}{6}=\frac{7}{6}$$

$$P(A)+P(B)=\frac{7}{6} > \frac{11}{12}=P(A\cup B)$$

in questo caso è vero che $P(A\cup B) < P(A)+P(B)$