CdD - TdD - XIII es - 16/10/2008

3. In una finale regionale di 100 metri piani di atletica sono presenti 6 atleti: 3 appartenenti alla squadra A — Antonio, Arturo ed Andrea – e 3 appartenenti alla squadra B — Bruno, Benedetto e Bernardo. Se i 6 atleti hanno uguale abilità (e gli ordini di arrivo sono equiprobabili), qual è la probabilità

(a) che Antonio arrivi primo, Arturo secondo ed Andrea quarto?

S = ordini di arrivo dei 6 atleti

Casi possibili = Permutazioni di 6 elementi = $6! = 720$

C. favorevoli

1°	2°	3°	4°	5°	6°
Ant	Art	B	And	B	B

permuto i 3 atleti della squadra B $= 3! = 6$

$$\text{Prob} = \frac{\text{c. fav}}{\text{c. poss}} = \frac{6}{720} = \frac{1}{120} \simeq 0.0085$$

(b) che i tre atleti della squadra A si piazzino al primo, al secondo e al quarto posto?

1°	2°	3°	4°	5°	6°
A	A	B	A	B	B

permuto gli atleti A

permuto gli atleti B

$3! = 6 \quad \times \quad 3! = 6$

$$Prob = \frac{c.fav}{c\ poss} = \frac{6 \cdot 6}{720} = \frac{36}{720} = \frac{1}{20} = 0.05$$

(c) che Antonio arrivi immediatamente prima di Bruno (indipendentemente dalla loro posizione assoluta)?

(Ant Bru) vengono considerati come un atleta unico

$\boxed{}$

Considero le permutazioni di (Ant Bru) e gli altri 4

$\square$ X X X X   c. fa. $5!$

↑ gli altri 4   Prob $= \dfrac{5!}{6!} = \dfrac{\cancel{5!}}{6\,\cancel{5!}} = \dfrac{1}{6}$

(d) che Antonio e Bruno arrivino vicini in classifica?.

1) fisso l'ordine: prima Ant, poi Bru

$\Rightarrow$ Vedo punto (c) $\Rightarrow 5!$

2) Faccio variare l'ordine di Ant e Bru

$\Rightarrow 2! = 2$

c. fav $=$ 1) $\times$ 2) $= 5! \cdot 2$

Prob $= \dfrac{2\,5!}{6!} = \dfrac{2 \cdot \cancel{5!}}{6\,\cancel{5!}} = \dfrac{1}{3}$

4. Si consideri una ruota della roulette con 37 possibili risultati diversi: $0, 1, 2, \ldots, 36$. Il croupier lancia 6 volte la pallina.

(a) Qual è la probabilità di ottenere la seguente sequenza ordinata di risultati $(8, 5, 24, 0, 5, 15)$?

$1^\circ \quad 2^\circ \quad 3^\circ \quad 4^\circ \quad 5^\circ \quad 6^\circ$

c. poss.: $37 \times 37 \times 37 \times 37 \times 37 \times 37 = 37^6$

c. fav: $1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

$$\text{Prob} = \frac{1}{37^6} = \frac{1}{2565726409}$$

(b) Qual è la probabilità di ottenere al primo lancio uno 0, nei due successivi numeri multipli di 8 e negli ultimi tre lanci numeri multipli di 5? ~~senza considerare il loro ordine di apparizione?~~

c.fav	1°	2°	3°	4°	5°	6°
esiti	0	m8	m8	m5	m5	m5

$\#\text{esiti} \quad 1 \times 4 \times 4 \times 7 \times 7 \times 7 = 5488$

$m8 = \{8, 16, 24, 32\} \qquad m5 = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35\}$

$$\text{Prob} = \frac{5488}{2565726409} \simeq 0.0000031$$

(c) Qual è la probabilità di ottenere nei sei lanci uno 0, due multipli di 8 e tre multipli di 5, senza considerare il loro ordine di apparizione?

1) fisso l'ordine dei multipli

0 m8 m8 m5 m5 m5

esiti ⇒ vedi punto b ⇒ 5488

2) Vario l'ordine di apparizione dei mult.pl.

permuto 0 m8 m8 m5 m5 m5

permuto 6 elementi: 2 (m8) indistinguibili, 3 (m5) indistinguibili

$$\#\text{casi} = \frac{6!}{3!\,2!} = \frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4}^{2}\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot \cancel{2}} = 60$$

c.f.(v: 1)×2) = 5438 · 60 | $\text{Prob} = \frac{5488(60)}{37^6} \simeq 0.000123$

5. Un professore assegna 15 problemi ad un suo studente. Fra i problemi assegnati, 5 verranno scelti a caso per il testo finale. Lo studente ha avuto modo di studiarne solo 6. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

(a) A = lo studente ha studiato tutti e cinque i test presenti nel test finale

ESTRAZIONE – NON CONTA L'ORDINE

T T T T T T N N N N N N N N N

Vengono scelti 5 test da 15

$$c\ \text{poss} = C_{15,5} = \binom{15}{5} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot \cancel{10!}}{5!\,\cancel{10!}} =$$

$$= \frac{\cancel{15}\cdot\cancel{14}^{7}\cdot 13\cdot\cancel{12}^{3}\cdot 11}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = 7\cdot 13\cdot 3\cdot 11 = 3003$$

$$C.\,fav \quad \underbrace{T\,T\,T\,T\,T\,T}_{5\ Stat}\ \underbrace{N\,N\,N\,N\,N\,N\,N\,N\,N}_{0\ Test}$$

$$C\,fav = C_{6,5} = \binom{6}{5} = \binom{6}{1} = 6$$

$$P(A) = \frac{\cancel{6}}{3\cancel{003}} = \frac{2}{1001}$$

(b) $B =$ lo studente ne ha studiati almeno 4

ALMENO 4 = 4 o + = 4 o 5

Prob (ne ha studiati 4)

$$\underbrace{T\,T\,T\,T\,T\,T}_{4\ \text{da questi}}\ \underbrace{N\,N\,N\,N\,N\,N\,N\,N\,N}_{1\ \text{da questi}}$$

$$c\,fav \quad \binom{6}{4} \times \binom{9}{1} = \frac{\cancel{6}^{3}\cdot 5\cdot\cancel{4!}}{\cancel{2}\,\cancel{4!}}\cdot 9$$

$$\text{Prob}(\text{st.}4) = \frac{\cancel{3}\cdot 5\cdot 9}{\cancel{3003}\ 1001} = \frac{45}{1001}$$

$$\text{Prob}(\text{st.}5) = \frac{2}{1001} \quad (\text{già calcolato})$$

$$\text{Prob}(\text{almeno}) = P(\text{st.}4 \cup \text{st.}5) =$$

$$= P(\text{st.}4) + P(\text{st.}5) = \frac{45}{1001} + \frac{2}{1001} = \frac{47}{1001}$$

(c) C = lo studente non ne ha studiato nessuno

$$\underbrace{T\,T\,T\,T\,T\,T}_{0 \text{ da qui}}\ \underbrace{N\,N\,N\,N\,N\,N\,N\,N\,N}_{5 \text{ da qui}}$$

C. fav

$$\binom{6}{0} = 1 \qquad \binom{9}{5} = \frac{9\cdot \overset{2}{\cancel{8}}\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5!}}{\cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{5!}}$$

posso non considerarlo

$$P(C) = \frac{\cancel{9}^{\,3}\cdot 2\cdot \cancel{7}}{\cancel{3203}\;\cancel{1601}\;163} = \frac{6}{163} \simeq 0.041$$

6. Si lanciano quattro dadi bilanciati (tenendo conto dell'ordine di lancio). Trovare la probabilità che

   (a) i quattro dadi diano lo stesso punteggio;

c. pos.

$$\begin{array}{cccc} 1^\circ & 2^\circ & 3^\circ & 4^\circ \\ 6 \times & 6 \times & 6 \times & 6 = 6^4 \end{array}$$

c. fav.

$$\begin{array}{cccc} 1^\circ & 2^\circ & 3^\circ & 4^\circ \\ 6 \times & 1 \times & 1 \times & 1 = 6 \end{array}$$

$$P((a)) = \frac{6}{6^4} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$$

(b) si abbia un tris (tre dadi di punteggio uguale);

1) fisso l'ordine del tris
(vario i numeri)

$$\begin{array}{cccc} 1^\circ & 2^\circ & 3^\circ & 4^\circ \\ T & T & T & N \end{array}$$

$$\# \text{esiti} = 6 \times 1 \times 1 \times 5 = 30$$

2) Vario l'ordine del tris.
Scelgo le 3 posizioni del Tris (T) dalle 4 disponibili in $\binom{4}{3} = \binom{4}{1} = 4$

in alternativa

Considero

$$\left.\begin{array}{c} TTTN \\ TTNT \\ TNTT \\ NTTT \end{array}\right\} 4 \text{ modi}$$

$$\text{Prob}((b)) = \frac{\text{c.fav}}{\text{c.poss}} = \frac{1)\times 2)}{6^4} = \frac{30\cdot 4}{6^4} = \frac{\cancel{120}}{\cancel{1296}} = \frac{10}{108} \simeq 0.0926$$

(c) due dadi siano pari, gli altri dispari;

1) fisso l'ordine dei Pari e Dispari.

1°	2°	3°	4°
P	P	D	D

$\#\text{casi} = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$

2) Vario l'ordine dei P e D:

permut PP DD:

4 elementi: 2 indistinguibili (P), 2 " (D)

$$\frac{4!}{2!\,2!} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\cdot 3\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}} = 6$$

(oppure scelgo le due posizioni D delle 4 $= \binom{4}{2} = 6$)

$$Prob(C) = \frac{\#\,fav}{\#\,pos} = \frac{1) \times 2)}{6^4} = \frac{3^4 \cdot 6}{6^4} = \frac{\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot 3\cdot\cancel{6}}{\underset{2}{\cancel{6}}\cdot\underset{2}{\cancel{6}}\cdot\underset{2}{\cancel{6}}\cdot\cancel{6}} = \frac{3}{8}$$

(d) si abbiano due coppie;

1) fisso l'ordine delle coppie

$$\begin{array}{cccc} C_1 & C_1 & C_2 & C_2 \\ 1° & 2° & 3° & 4° \end{array}$$

$\#\,ord.$ $\quad 6 \times 1 \times 5 \times 1 = 30$

2) Vario l'ordine delle coppie.

ATTENZIONE: Se considero i modi di

permutare $c_1 c_1 c_2 c_2$ conterò una coppia due volte:

es. $c_1\ c_2\ c_1\ c_2$ $\quad c_1 = 3\quad c_2 = 5$

$(3\ 5\ 3\ 5)$

$c_2\ c_1\ c_2\ c_1$ $\quad c_1 = 5\quad c_2 = 3$

Per evitare questo:

Considero le permutazioni di 4 elem. $\begin{cases} 2 \text{ ind.} \\ 2 \text{ ind.} \end{cases}$

e divido per due

$$\#\text{modi} = \frac{4!}{2!\,2!}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\cancel{4}\cdot 3\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}}\,\frac{1}{\cancel{2}} = 3$$

$$\text{Prob}(d) = \frac{(3\times 2)}{6^4} = \frac{\cancel{6}\cdot 5\cdot\cancel{3}}{\cancel{6}\cdot\cancel{6}_{2}\cdot 6\cdot 6} = \frac{5}{72} \simeq 0.069$$

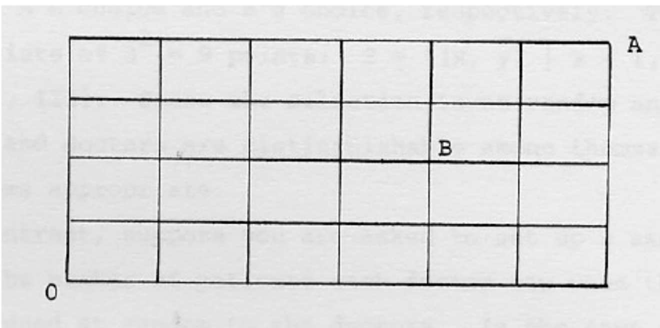
(e) i quattro dadi diano tutti punteggi differenti

$1^\circ \quad 2^\circ \quad 3^\circ \quad 4^\circ$

c.fav $\quad 6 \times 5 \times 4 \times 3$

$$\text{Prob}(e) = \frac{\cancel{6}\cdot 5\cdot \cancel{4}^{2}\cdot \cancel{3}}{\cancel{6}\cdot 6\cdot \cancel{6}_{3}\cdot \cancel{6}_{2}} = \frac{5}{18} \simeq 0.2777$$

10. Un gioco da tavolo prevede una scacchiera del tipo seguente:



Un pezzo è mosso di un tratto per volta o a destra o in alto, partendo dal punto O per arrivare al punto A.

(a) Quante sequenze diverse sono possibili?

Per arrivare da O ad A ci sono
10 mosse: 4 in Alto e 6 a Destra
A D

Quello che cambia nei tragitti
è l'ordine delle mosse
ADDAADADDD
$\#$tragitti = $\#$permutazioni di 10 lettere < 6 D, 4 A

$$\#\text{Modi} = \frac{10!}{6!\,4!} = \frac{10^{3} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{6!}} = 210$$

~~(b)~~ Se il pezzo passa per B il giocatore ottiene un bonus B

(c) Se ogni sequenza ha uguale probabilità , qual è la probabilità di ottenere il bonus?

C. poss = 210

C. fav: ottengo il bonus B se nei primi 6 spostamenti ne ho 4 a dx, 2 in alto

negli ultimi 4 spostamenti
ne ho 2 a destra e 2 in alto

$\boxed{D\ A\ D\ D\ A\ D}\ \boxed{A\ D\ A\ D}$

↑ 1° tratto ↑ 2° tratto

1° tratto: permutazioni 6 elem. $\left\langle \begin{array}{l} 4D \\ 2A \end{array}\right.$

$$\frac{6!}{2!\,4!} = \frac{\cancel{6}^{\,3} \cdot 5}{\cancel{2}} = 15$$

2° tratto: permutazioni 4 elem. $\left\langle \begin{array}{l} 2A \\ 2D \end{array}\right.$

$$\frac{4!}{2!\,2!} = \frac{\cancel{4}^{\,2}\, 3}{\cancel{2}} = 6$$

1° tratto × 2° tratto: 15×6

Prob (ottenere un bonus) $= \dfrac{c.\ fav.}{c\ poss} =$

$$= \frac{\frac{6!}{4!\,2!}\;\frac{4!}{2!\,2!}}{\frac{10!}{6!\,4!}} = \frac{\cancel{15}\cdot\cancel{6}^{3}}{\cancel{210}_{\cancel{14}_{7}}} = \frac{3}{7}$$