CdP - TdD - XV - 22/10/2008

Titolo nota [redacted]

INDIPENDENZA DI 3 EVENTI

Come fare a definire l'indipendenza di 3 eventi: E, F e G.

1° proposta: la probabilità dell'intersezione dei 3 eventi è uguale al prodotto delle probabilità

$$P(EFG) = P(E)P(F)P(G)$$

L'idea è giusta ma non è sufficiente.

Esempio: Lancio di 3 monete bilanciate

$S = \{(TTT), (TTC), (TCT), (TCC), (CTT), (CTC), (CCT), (CCC)\}$

E = "almeno 2 Teste" =

$= \{(TTT), (TTC), (TCT), (CTT)\}$

$F =$ "o nessuna T o due T" $=$
$= \{(CCC), (TTC), (TCT), (CTT)\}$

$G =$ "ottengo Croce al 1° lancio" $=$
$= \{(CTT), (CTC), (CCT), (CCC)\}$

$EFG = \{(CTT)\}$

$P(E) = \dfrac{\#\text{ casi fav}}{\#\text{ casi poss}} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

$P(F) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} \qquad P(G) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

$P(EFG) = \dfrac{1}{8}$

$P(E)P(F)P(G) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$

$P(EFG) = \dfrac{1}{8}$

$=$

Tuttavia mi aspetterei che anche le coppie di eventi scelti fra E, F e G fossero indipendenti. In realtà non è così:

$E \cdot F =$ "almeno 2 T" e "0 T o 2 T" $=$

$=$ "esattamente 2 T" $=$

$= \{(TTC), (TCT), (CTT)\}$

$$P(EF) = \frac{3}{8} \neq$$

$$P(E)P(F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

La formula $P(EFG) = P(E)P(F)P(G)$ non riesce a garantire che le coppie di eventi $\{E,F\}$, $\{E,G\}$, $\{F,G\}$ siano indipendenti.

Per assicurarmi dell'indipendenza di 3 eventi devo anche accertarmi che gli eventi siano indipendenti a coppie

Definizione: Gli eventi E, F e G sono indipendenti se valgono le seguenti eguaglianze:

$$P(EFG) = P(E)P(F)P(G)$$

$$P(EF) = P(E)P(F)$$

$$P(EG) = P(E)P(G)$$

$$P(FG) = P(F)P(G)$$

Esempio: Lancio di 3 monete (stesso S di prima)

E = Testa al 1° lancio

F = Croce al 2° lancio

G = Croce al 3° lancio

$E = \{(TTT), (TCT), (TTC), (TCC)\}$

$F = \{(TCT), (TCC), (CCT), (CCC)\}$

$G = \{(TTC), (TCC), (CTC), (CCC)\}$

$EF =$ "T al 1°" e "C al 2°" $=$

$= \{(TCT), (TCC)\}$

$EG =$ "T al 1°" e "C al 3°" $=$

$= \{(TTC), (TCC)\}$

$FG =$ "C al 2°" e "C al 3°" $=$

$= \{(TCC), (CCC)\}$

$EFG =$ "T al 1°" e "C al 2°" e "C al 3°"

$= \{(T\,C\,C)\}$

$$P(E) = P(F) = P(G) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(EF) = P(EG) = P(FG) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(EFG) = \frac{1}{8}$$

$$P(E)\,P(F)\,P(G) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P(EFG) = \frac{1}{8}$$

=

$$P(E)\,P(F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(EF) = \frac{1}{4}$$

=

$P(E)P(G) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(EG) = \frac{1}{4}$

$P(F)P(G) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(FG) = \frac{1}{4}$

E, F e G sono eventi indipendenti

INDIPENDENZA di n EVENTI.

Ovviamente, la nozione di indipendenza si può estendere a più di 3 eventi. Gli eventi $E_1, E_2, \ldots, E_n$ si dicono indipendenti se per ogni sottoinsieme $E_{1'}, E_{2'}, \ldots, E_{r'}$, $r \leq n$, di questi eventi si ha

$$P(E_{1'}E_{2'} \cdots E_{r'}) = P(E_{1'})P(E_{2'}) \cdots P(E_{r'})$$

Per esempio per verificare l'indipendenza di 4 insiemi

$E_1\ E_2\ E_3\ E_4$

bisogna verificare le seguenti equazioni.

tutti e 4

$$P(E_1 E_2 E_3 E_4) = P(E_1)P(E_2)P(E_3)P(E_4)$$

ma anche tutti i gruppi di 3

$$P(E_1 E_2 E_3) = P(E_1)P(E_2)P(E_3)$$

$$P(E_1 E_2 E_4) = P(E_1)P(E_2)P(E_4)$$

$$P(E_1 E_3 E_4) = P(E_1)P(E_3)P(E_4)$$

$$P(E_2 E_3 E_4) = P(E_2)P(E_3)P(E_4)$$

ed infine tutti i gruppi di 2

$P(E_1 E_2) = P(E_1)P(E_2)$ $\quad P(E_1 E_3) = P(E_1)P(E_3)$

$P(E_1 E_4) = P(E_1)P(E_4)$ $\quad P(E_2 E_3) = P(E_2)P(E_3)$

$P(E_2 E_4) = P(E_2)P(E_4)$ $\quad P(E_3 E_4) = P(E_3)P(E_4)$

$\#$ condizioni: $\underbrace{1}_{\text{gruppi di 4}} + \underbrace{4}_{\text{g. di 3}} + \underbrace{6}_{\text{g. di 2}} = 11$

2 tipi di esercizi

- a. verifica dell'indipendenza di eventi

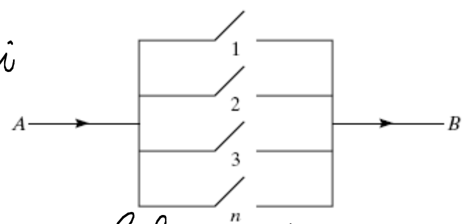
- b. esercizi nei quali l'indipendenza è un dato dell'esercizio di cui tenere conto

Esercizio di tipo b

Esempio 4g. Un sistema costituito da n componenti è detto sistema parallelo se esso funziona quando almeno uno dei suoi componenti funziona (si veda la Figura 3.2). In un tale sistema, il componente i, indipendente dagli altri componenti, funziona con probabilità $p_i, i = 1, \ldots, n$. Qual è la probabilità che il sistema funzioni?

A_i = il componente i funziona

$i = 1, 2, \ldots n$



Dati: $P(A_i) = p_i$ | Gli eventi $A_1 A_2 \ldots A_n$ sono indipendenti

P (sistema funziona) $= ?$

il sistema funziona se almeno uno degli A_i si verifica

sistema funziona $= \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = ?$$

$$P(E^c) = 1 - P(E) \iff P(E) = 1 - P(E^c)$$

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(E) = 1 - P(E^c) =$$

$$= 1 - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c\right) =$$

$$\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right)$$ DE MORGAN

$$= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right) = \text{(per l'indipendenza)}$$

$$= 1 - P(A_1^c) \cdot P(A_2^c) \cdot P(A_3^c) \cdots P(A_n^c)$$

$$= 1 - (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) \cdots (1-p_n)$$

Oss 1 I primi passaggi possono anche essere spiegati così:

$$P\{\text{il sistema funziona}\} = 1 - P\{\text{il sistema non funziona}\}$$
$$= 1 - P\{\text{nessun componente funziona}\}$$
$$= 1 - P\left(\bigcap_i A_i^c\right) = \cdots = 1 - (1-p_1)(1-p_2) \cdots (1-p_n)$$

Oss 2 l'indipendenza di n eventi si estende anche ai complementari

Se $A_1, A_2 \dots A_n$ sono indipendenti

$\Rightarrow$ anche $A_1^c\, A_2^c \dots A_n^c$ sono indipendenti

Esercizio di tipo a

2. Si consideri l'estrazione di una sola carta da un mazzo di 40 carte (suddiviso in 4 semi: Cuori (rosso), Quadri (rosso), Fiori (nero) e Picche (nero) e 10 numeri: A,2,3,4,5,6,7,J,Q,K) e gli eventi A_1 = estrazione di una carta inferiore o uguale a 5 e A_2 = estrazione di una carta rossa.

   (a) A_1 e A_2 sono eventi indipendenti?

estraggo 1 carta da 40

casi possibili = 40

A_1 = carte ≤ 5

$$\left.\begin{array}{l} \heartsuit\ A\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ \diamondsuit\ A\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ \clubsuit\ A\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ \spadesuit\ A\ 2\ 3\ 4\ 5 \end{array}\right\} 20 \text{ carte}$$

$$P(A_1) = \frac{c.\ fav}{c\ pos} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

A_2 = carte rosse

$$\left.\begin{array}{l} \heartsuit\ A\ 2 \ldots K \\ \diamondsuit\ A\ 2 \ldots K \end{array}\right\} 20 \text{ carte}$$

$$P(A_2) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

$A_1 A_2$: carte ≤ 5 e rosse

$$\left.\begin{array}{l} \heartsuit\ A \ldots 5 \\ \diamondsuit\ A \ldots 5 \end{array}\right\} 10 \text{ carte}$$

$$P(A_1 A_2) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} =$$

$$P(A_1)\cdot P(A_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} = A_1\, A_2 \text{ indipendenti}$$

(b) Si supponga di togliere dal mazzo l'asso di picche prima di effettuare l'estrazione. In questo caso A_1 e A_2 sono eventi indipendenti? Si possono togliere delle carte dal mazzo in modo tale che A_1 e A_2 siano indipendenti?

Casi possibili = 39 carte

A_1 = carta ≤ 5

		# carte
$\heartsuit$ A … 5	5 +	
$\diamondsuit$ A . 5	5 +	
$\clubsuit$ A .. 5	5 +	
$\spadesuit$ 2 .. 5	4	19

$$P(A_1) = \frac{19}{39}$$

A_2 = carta rossa

		# carte
$\heartsuit$ A … K	10 +	
$\diamondsuit$ A .. K	10	= 20

$$P(A_2) = \frac{20}{39}$$

$A_1 A_2$ = carta ≤ 5 e rossa

$\heartsuit$ A .. 5		10
$\diamondsuit$ A .. 5		carte

$$P(A_1 A_2) = \frac{10}{39}$$

$$P(A_1)P(A_2) = \frac{19}{39}\,\frac{20}{39} = \frac{380}{1521} \neq$$

A_1 e A_2 non sono indipendenti

(A_1 A_2 sono dipendenti)

Si può verificare che se invece di togliere una sola carta si toglie un intero seme o tutte le carte di un numero allora A_1 e A_2 rimangono indipendenti

(c) Si consideri ancora l'estrazione dell'intero mazzo e i seguenti eventi: A_3 = estrazione di una carta nera inferiore ai sei o una carta rossa maggiore del cinque, A_4 = estrazione di una carta di quadri o una figura (J,Q o K) di cuori o di una carta di picche che non sia una figura (inferiore al Jack) ed, infine, A_5 = estrazione di una carta di cuori o di picche. Quali tra le seguenti sono terne di eventi indipendenti? $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$ o $A_1A_2A_5$?

$A_3 = (\text{carte} \leq 5 \text{ o rosse} \geq 6)$

Verifico l'indipendenza di $A_1\ A_2\ A_3$

So già che $P(A_1) = \frac{1}{2}$ $P(A_2) = \frac{1}{2}$

$P(A_1A_2) = \frac{1}{4}$ $\left(P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2)\right)$ già verificata

$A_3 = (\text{carte nere} \leq 5 \text{ o rosse} \geq 6)$

A_3
- ♣ A 2 3 4 5
- ♠ A 2 3 4 5
- ♥ 6 7 J Q K
- ♦ 6 7 J Q K

20 carte

$$P(A_3) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$