Calc. Prob. - XVI es. — 23/10/2008

Titolo nota 23/10/2008

7. Tombola "ristretta". Si consideri un tabellone di una tombola composto da soli 15 numeri

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15

e un sacchetto dei numeri composto dai corrispondenti 15 numeri. Da questo sacchetto si estraggono (in blocco) 3 numeri. Qual è la probabilità di

- ottenere un terno sulla prima fila

Casi possibili: estrazioni in blocco di 3 elementi su 15 : $C_{15,3} = \binom{15}{3}$

$$\binom{15}{3} = \frac{\cancel{15}^{5} \cdot \cancel{14}^{7} \cdot 13 \cdot \cancel{12!}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \quad \cancel{12!}} = 5 \cdot 7 \cdot 13 = 455$$

Casi favorevoli: $\underbrace{1\ 2\ 3\ 4\ 5}_{\text{3 numeri vengono da questo gruppo}}$ 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

$$c.f.\ \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

$$\text{Prob(terno prima fila)} = \frac{c.\ fav}{c.\ poss} = \frac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{455}_{91}} \simeq 0.021$$

- ottenere un terno su qualsiasi fila

C fav = ottenere terno 1° fila o ott. terno nella 2° o ott. terno nella 3° fila =

$$= 10 + 10 + 10 = 30$$

$$P(\text{terno}) = \frac{\cancel{30}\ 6}{\cancel{455}\ 91} \simeq 0.06593$$

- pescare tre numeri corrispondenti a 3 file diverse

$$\underbrace{1\ 2\ 3\ 4\ 5}_{1 \text{ pallina}} \quad \underbrace{6\ 7\ 8\ 9\ 10}_{1 \text{ pallina}} \quad \underbrace{11\ 12\ 13\ 14\ 15}_{1 \text{ pallina}}$$

$$\binom{5}{1} \qquad \binom{5}{1} \qquad \binom{5}{1}$$

$$5 \times 5 \times 5$$

$$\text{Prob}(3 \text{ file diverse}) = \frac{\cancel{125}\ 25}{\cancel{455}\ 91} \simeq 0.274$$

- ottenere un ambo nella prima fila

$$\underbrace{1\ 2\ 3\ 4\ 5}_{2\ pl} \qquad \underbrace{6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15}_{1\ pl}$$

$$\binom{5}{2} \times \binom{10}{1}$$

$$\frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \times 10$$

$$\text{Prob}(\text{ambo } 1^\circ \text{ fila}) = \frac{100}{455} \simeq 0.219$$

- ottenere un ambo su qualsiasi fila

$$\text{ambo} = (\text{ambo } 1^\circ \text{ fila}) \cup (\text{ambo } 2^\circ \text{ fila}) \cup (\text{ambo } 3^\circ)$$

$$\text{c. fav} = 100 + 100 + 100 = 300$$

$$P(\text{ambo}) = \frac{300}{455} \simeq 0.6593$$

Alternativamente:

$$P(\text{ambo}) = 3\, P(\text{ambo } 1^\circ \text{ f.la}) = 3 \cdot \frac{100}{455} = \frac{300}{455}$$

8. Vengono estratte 3 palline in blocco (senza rimpiazzo) da una scatola contenente 20 palline: 5 rosse, 5 gialle, 5 blu e 5 nere. Calcolare le probabilità dei seguenti eventi

- A = le tre palline estratte sono rosse;

C. poss.: estrazioni di 3 elementi in blocco da 20. $C_{20,3} = \binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot \cancel{18}^{3} \cdot \cancel{17!}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{17!}}$

$= 20 \cdot 19 \cdot 3$

C. fav

OOOOO OOOOO OOOOO OOOOO

$\underbrace{\text{OOOOO}}_{\text{3 da questo gruppo}}$

C. fav $C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot \cancel{4}^{2}}{\cancel{2}} = 10$

$P(A) = \frac{\text{C. fav}}{\text{C poss}} = \frac{\cancel{10}}{\cancel{20}_{2} \cdot 19 \cdot 3} = \frac{1}{114} \simeq 0.009$

- B = le tre palline estratte sono dello stesso colore;

$P(B) = P(3 \text{ rosse} \cup 3 \text{ gialle} \cup 3 \text{ blu} \cup 3 \text{ nere})$

incompatibili

$$= P(3\ \text{rosse}) + P(3\ \text{gialle}) + P(3\ \text{blu}) + P(3\ \text{nere})$$

$$= 4\, P(3\ \text{rosse}) = 4\, P(A) = 4 \cdot \frac{1}{114} \simeq 0.035$$

- $C =$ le tre palline estratte sono tutte di colore diverso.

<u>Fisso i colori:</u> manca il nero

$$\underbrace{\circ\circ\circ\circ\circ}_{\substack{1\ \text{rosso} \\ \binom{5}{1}}}\ \underbrace{\circ\circ\circ\circ\circ}_{\substack{1\ \text{giallo} \\ \binom{5}{1}}}\ \underbrace{\circ\circ\circ\circ\circ}_{\substack{1\ \text{blu} \\ \binom{5}{1}}}\ \underset{\emptyset}{\circ\circ\circ\circ\circ}$$

$$5 \times 5 \times 5 = 125$$

<u>Vario i colori:</u> ripeto il ragionamento per ogni colore mancante: 4

C. fav: 4×125

$$P(3\ \text{colori diversi}) = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{125}\ 25}{\cancel{20}\ 5 \cdot 19 \cdot 3} = \frac{25}{57} \simeq 0.43$$

9. Si pongono a caso tre palline in due cassetti, uno rosso ed uno blu. Calcolare le probabilità dei seguenti eventi:

A: due palline in un cassetto e una pallina in un altro;

B: tutte le palline in un cassetto;

Spazio campionario: situazione corrispondente al lancio di 3 monete

1° pallina $\langle$ R, B $\quad$ 2° pallina $\langle$ R, B $\quad$ 3° pl $\langle$ R, B

$$S = \{(RRR), (RRB), (RBR), (RBB), (BRR), (BRB), (BBR), (BBB)\}$$

$$A = \{(RRB), (RBR), (RBB), (BRR), (BRB), (BBR)\} \qquad P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$B = \{(BBB), (RRR)\} \qquad P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

osservazione $P(A) + P(B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

A, B disgiunti
$A \cup B = S$ $\Big\}$ A e B sono una partizione di S

$$1 = P(S) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

11. Un urna contiene 30 palline: metà rosse e numerate da 1 a 15 e metà nere e numerate da 1 a 15. Vengono estratte a caso 4 palline. Qual è la probabilità che (a) le palline estratte non presentino numeri uguali;

C. poss: combinazioni in blocco di 4 elementi su 30

$$C\ poss = C_{30,4} = \binom{30}{4} = \frac{\cancel{30}^{5} \cdot 29 \cdot \cancel{28}^{7} \cdot 27 \cdot \cancel{26!}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{26!}}$$

$$= 5 \cdot 29 \cdot 7 \cdot 27$$

c. fav: camp. urna

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

c. fav: 4 numeri diversi (colore qualsiasi)

<u>scelgo i numeri</u>: scelgo 4 numeri diversi su 15

$$C_{15,4} = \binom{15}{4} = \frac{15 \cdot \cancel{14}^{7} \cdot 13 \cdot \cancel{12}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 15 \cdot 7 \cdot 13$$

Una volta scelti i numeri, scelgo i colori

ad es. 3, 4, 11, 12

3 4 11 12

3 4 11 12

\#modi $\quad 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$c\ fav = 15 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$$\text{Prob}(4 \text{ numeri diversi}) = \frac{c\ fav}{c\ pos} =$$

$$= \frac{\cancel{15}^{3} \cdot \cancel{7} \cdot 13 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{\cancel{5} \cdot 29 \cdot \cancel{7} \cdot 27} = \frac{624}{783} \simeq 0.7841$$

(b) si ottenga esattamente un paio di palline con il numero uguale;

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Scelgo i numeri: $\quad \underbrace{c\ c}_{\text{coppia}} \ \underbrace{x\ y}_{\text{numeri "spaiati"}}$

il numero della coppia lo scelgo in
$\binom{15}{1} = 15$ modi diversi

- i due numeri spaiati li scelgo
in $\binom{14}{2} = \frac{\overset{7}{\cancel{14}}(13)}{\cancel{2}} = 7 \cdot 13$

scelgo i numeri in $15 \cdot 7 \cdot 13$ modi
Una volta scelti i numeri scelgo i colori

$$\begin{matrix} 6 & 8 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} & 13 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \\ 6 & & \end{matrix}$$

	coppia		
# modi	1	2	2

c. fav: $15 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 2$

$$P(1 \text{ coppia}) = \frac{c \cdot fav}{c\ poss} = \frac{\overset{3}{\cancel{15}} \cdot \cancel{7} \cdot 13 \cdot 2 \cdot 2}{\cancel{5} \cdot 29 \cdot \cancel{7} \cdot 27} =$$

$$= \frac{156}{783} \simeq 0.1992$$

c) si ottengano 2 paia di palline con gli stessi numeri.

Scelgo i numeri: $\binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 15 \cdot 7$

Una volta scelti i numeri non posso scegliere i colori. 7 9 7 9

$$\text{Prob}(2 \text{ coppie}) = \frac{\text{c. fav}}{\text{c. pos}} = \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{15}\,3}{\cancel{5} \cdot 29 \cdot \cancel{7} \cdot 27}$$

$$= \frac{3}{783} \simeq 0.0038.$$

Osservazione: $P(a) + P(b) + P(c) =$

$$= \frac{624}{783} + \frac{156}{783} + \frac{3}{783} = \frac{783}{783} = 1$$

Non è accidentale perché
(a), (b) e (c) sono tre
partizioni dello spazio campionario

13. Si considerano 7 antenne, 3 delle quali sono difettose e 4 funzionanti. Le antenne sono disposte una a fianco dell'altra.

(a) Supponendo che le antenne funzionanti siano indistinguibili fra di loro, e allo stesso modo le antenne difettose siano indistinguibili, in quanti modi si possono disporre le antenne?

1 = antenne funzionanti (4)
0 = " difettose (3)

1 1 0 0 1 1 0
0 0 0 1 1 1 1
0 1 0 1 0 1 1 . . .

permut 7 oggetti $\begin{cases} 4 \text{ indistinguibili } (1) \\ 3 \text{ ind. } (0) \end{cases}$

$$\#: \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \, \cancel{4!}}{\cancel{4!} \, \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 35$$

(b) Supponendo che ogni ordinamento delle antenne abbia eguale probabilità, qual è la probabilità che l'antenna collocata più a sinistra sia difettosa?

C pos = 35 (vedi punto a).

C. fav: $0 \underbrace{X\ X\ X\ X\ X\ X}_{}$

a destra 4 funz (1)
2 difett (0)

C. fav permutazioni di 6 oggetti: 4 ind (1), 2 ind (0)

$$C\ fav = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}} \cdot 5\ \cancel{4!}}{\cancel{4!}\ \cancel{2}} = 15$$

$$Prob(b) = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$$

(c) Sotto le stesse ipotesi, qual è la probabilità che ai due estremi (destro e sinistro) ci siano antenne funzionanti?

$1\ \underbrace{X\ X\ X\ X\ X}_{}\ 1$

2 funz 1
3 dif 0

$$C\ fav = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

$$\text{Prob}(c) = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$$

(d) Il sistema è **efficiente** se due (o più) antenne difettose **non** sono posizionate consecutivamente (ovvero ogni antenna difettosa ha delle antenne funzionanti vicine). Sotto l'ipotesi di equiprobabilità degli ordinamenti delle antenne, qual è la probabilità che il sistema sia efficiente? E che non lo sia?

Vedi esempio visto a lezione

n = antenne totali

m = antenne difettose

sistemi funzionanti: $\binom{n-m+1}{m}$

nel caso particolare

$n=7$ $m=3$ $\binom{n-m+1}{m} =$

$$= \binom{7-3+1}{3} = \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

$$\text{Prob}(d) = \frac{\text{c. fav}}{\text{c pos}} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$$