1. (Antonelli - Regoli) In un esame di calcolo delle probabilità ogni candidato seleziona una busta a caso fra tre buste. Ogni busta contiene un quesito su un argomento diverso; la prima busta contiene un quesito sulla probabilità condizionata, la seconda sulla legge delle probabilità totali e la terza sul teorema di Bayes. Si supponga che la probabilità di superare il quesito sulla probabilità condizionata è 0.5, quella di superare il quesito sul teorema delle probabilità totali è 0.6 mentre quella di superare il terzo quesito è 0.3. Calcolare

   (a) la probabilità che un candidato superi l'esame;

EVENTI

B_1 = estraggo la busta 1 (prob. cond)

B_2 = " " " 2 (prob. tot)

B_3 = " " " 3 (Bayes)

R = Supero l'esame

DATI

$$P(R|B_1) = 0.5 = \frac{1}{2}$$

$$P(R|B_2) = 0.6 = \frac{3}{5}$$

$$P(R|B_3) = 0.3 = \frac{3}{10}$$

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$$

$P(R) = ?$ Legge prob. Totali

$$P(R) = P(B_1)P(R|B_1) + P(B_2)P(R|B_2) + P(B_3)P(R|B_3) = \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{\cancel{3}}\frac{\cancel{3}}{5} + \frac{1}{\cancel{3}}\frac{\cancel{3}}{10} = \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{5+6+3}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

(b) la probabilità che abbia risolto un quesito sul teorema di Bayes dato che ha superato l'esame;

$P(B_3|R) = ?$ T. Bayes.

$$P(B_3|R) = \frac{P(B_3 R)}{P(R)} = \frac{P(B_3)P(R|B_3)}{P(R)}$$

già calcolato $\longrightarrow P(R)$

$$= \frac{\frac{1}{\cancel{3}}\frac{\cancel{3}}{10}}{7/15} = \frac{1}{\cancel{10}_{2}} \cdot \frac{\cancel{15}^{3}}{7} = \frac{3}{14}$$

(c) la probabilità di superare l'esame sapendo che non ha scelto il quesito sul teorema di Bayes.

$$P(R \mid B_3^c)$$

OSSERVAZIONE: $P(R \mid B_3) = \frac{3}{10}$

NON E' VERO CHE

$$\underline{P(R \mid B_3^c) = 1 - P(R \mid B_3)}$$ NO!

Mentre è vero che

$$\underline{P(R^c \mid B_3) = 1 - P(R \mid B_3)}$$ SI!

$$P(R \mid B_3^c) = \frac{P(R B_3^c)}{P(B_3^c)}$$

$$P(B_3^c) = 1 - P(B_3) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(R B_3^c) = P(R \setminus B_3) = P(R) - P(R B^3)$$

$$= P(R) - P(B_3) P(R | B_3) =$$

$$= \frac{7}{15} - \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{10} = \frac{14-3}{30} = \frac{11}{30}$$

$$P(R | B_3^c) = \frac{\frac{11}{30}}{\frac{2}{3}} = \frac{11}{\cancel{30}_{10}} \cdot \frac{\cancel{3}}{2} = \frac{11}{20}$$

3. In una fabbrica di bibite, le bottiglie vengono sottoposte ad un controllo prima di essere riempite. Il 30% delle bottiglie sono difettose. La probabilità che l'ispettore si accorga che una bottiglia è difettosa, e quindi la scarti, è 0.9, mentre la probabilità che l'ispettore giudichi erroneamente difettosa una bottiglia buona è 0.2.

Qual è la probabilità che una bottiglia scartata sia effettivamente difettosa? E la probabilità che una bottiglia giudicata buona sia invece difettosa?

EVENTI

$D =$ Bottiglie difettose $\quad F =$ Bott. funzionanti $(F = D^c)$

$C =$ Bott. scartate $\quad T =$ Bott. tenute $\quad (T = C^c)$

Dati: $P(D) = 0.3$

$P(F) = P(D^c) = 1 - P(D) = 0.7$

$P(C|D) = 0.9$

$P(T|D) = P(C^c|D) = 1 - P(C|D) =$

$= 1 - 0.9 = 0.1$

$P(C|F) = 0.2$

$P(T|F) = P(C^c|F) = 1 - P(C|F)$

$= 1 - 0.2 = 0.8$

Il problema chiede

$P(D|C) = ? \quad P(D|T) = ?$

T. Bayes. $\quad P(D|C) = \dfrac{P(DC)}{P(C)} =$

$$= \frac{P(D)P(C|D)}{P(D)P(C|D) + P(F)P(C|F)} =$$

$$= \frac{(0.3)(0.9)}{(0.3)(0.9) + (0.7)(0.2)} =$$

$$= \frac{0.27}{0.27 + 0.14} = \frac{0.27}{0.41} = \frac{27}{41} \simeq 0.65$$

$$P(D|T) = \frac{P(DT)}{P(T)} =$$

$$= \frac{P(D) \cdot P(T|D)}{P(D)P(T|D) + P(F)P(T|F)}$$

$$= \frac{(0.3)(0.1)}{(0.3)(0.1) + (0.7)(0.8)} =$$

$$= \frac{0.03}{0.03 + 0.56} = \frac{0.03}{0.59} = \frac{3}{59} \simeq 0.051$$

Scorciatoie

$$P(T) = P(C^c) = 1 - P(C) =$$

$$= 1 - 0.41 = 0.59$$

il denominatore del T. Bayes visto prima

9. Si vuole condurre un'indagine sulla percentuale di uomini che cantano sotto la doccia. Poiché alcuni uomini sono troppo imbarazzati per dichiarare apertamente le proprie abitudini canore, ad ogni intervistato viene chiesto di lanciare in segreto un dado equilibrato e

- dire comunque "no" se il dado dà 1
- dire comunque "si" se il dado dà 6
- rivelare il proprio vero comportamento se il dado dà 2,3,4 o 5.

Poichè l'esito del dado non è noto all'intervistatore, la percentuale di persone che rispondono "si" differisce da quelle che effettivamente cantano sotto la doccia. La percentuale effettiva di persone che cantano è 2/3.

(a) Quante persone rispondono "si" all'intervista?

Eventi: D_S = dire sempre sì

D_N = dire sempre no

D_V = dire la verità.

S = dire SI

N = dire NO

Dati: $P(D_N) = \frac{1}{6}$ $\quad P(D_S) = \frac{1}{6}$

$P(D_V) = \frac{2}{3}$ $\quad P(S|D_S) = 1$

$P(N|D_S) = 0$ $\quad P(S|D_N) = 0$

$P(N|D_N) = 1$ $\quad P(S|D_V) = \frac{2}{3}$

$P(N|D_V) = \frac{1}{3}$

(a) Quante persone rispondono "si" all'intervista?

$P(S) = ?$

Legge prob. totali:

$$P(S) = P(D_S)P(S|D_S) + P(D_N)P(S|D_N) + P(D_V)\cdot P(S|D_V) =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 0 + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{4}{9} =$$

$$= \frac{3+8}{18} = \frac{11}{18}$$

(b) Quante persone rispondono "no"?

$$P(N) = ?$$

$$P(N) = P(S^c) = 1 - P(S) = 1 - \frac{11}{18} = \frac{7}{18}$$

(c) Se una persona risponde "sì", qual è la probabilità che la sua risposta sia stata sincera (in quanto l'intervistato ha ottenuto 2,3,4 o 5 con il dado)?

$$P(D_V \mid S) = \frac{P(D_V\, S)}{P(S)} =$$

$$= \frac{P(D_V)\cdot P(S \mid D_V)}{P(S)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{11}{18}} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{11}{18}}$$

$$= \frac{4}{\cancel{9}}\cdot\frac{\cancel{18}\,2}{11} = \frac{8}{11}$$

(d) Se una persona risponde "no", qual è la probabilità che la sua risposta sia stata sincera (in quanto l'intervistato ha ottenuto 2,3,4 o 5 con il dado)?

$$P(D_V|N) = \frac{P(D_V N)}{P(N)} = \frac{P(D_V)P(N|D_V)}{P(N)}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{7}{18}} = \frac{2}{\cancel{9}} \cdot \frac{\cancel{18}\,2}{7} = \frac{4}{7}$$

5. Un dado presenta 6 facce: 4 rosse e 2 bianche. Un secondo dado presenta 2 facce rosse e 4 bianche. Uno dei due dadi viene scelto caso e lanciato, ottenendo una facciata rossa. Con che probabilità si tratta del primo dado? Se lo stesso dado viene lanciato una seconda volta, con che probabilità si ottiene nuovamente una facciata rossa?

Eventi

D_1 = si sceglie il 1° dado

D_2 = " " " 2° "

R = esce una faccia rossa

B " " " bianca

Dati $P(D_1) = P(D_2) = \frac{1}{2}$

$P(R \mid D_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$P(R \mid D_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Richiesto: $P(D_1 \mid R) = ?$ T. Bayes.

$$P(D_1 \mid R) = \frac{P(D_1, R)}{P(R)} =$$

$$= \frac{P(D_1)\,P(R \mid D_1)}{P(D_1)\,P(R \mid D_1) + P(D_2)\,P(R \mid D_2)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}}{3}}{\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2+1}{6}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$$

[redacted] Se lo stesso dado viene lanciato una seconda volta, con che probabilità si ottiene nuovamente una facciata rossa?

R_2 = il dado lanciato una 2° volta esce rosso.

Legge prob. totale.

$$P(R_2) = P(D_1|R) \cdot P(R_2|D_1) + P(D_2|R)\,P(R_2|D_2)$$

$$P(D_1|R) = \frac{2}{3} \qquad P(D_2|R) = P(D_1^c|R) = 1 - P(D_1|R) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(R_2|D_1) = \frac{2}{3} \qquad P(R_2|D_2) = \frac{1}{3}$$

$$P(R_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

6. (Dalle dispense di esercizi di Ilenia Epifani) Una prima urna contiene 4 palline bianche e 3 palline nere e una seconda urna contiene 3 palline bianche e 5 palline nere. Estraggo una pallina dalla prima urna e senza guardarla la ripongo nella seconda urna, quindi estraggo una pallina dalla seconda urna.

   (a) Calcolare la probabilità che la pallina estratta dalla seconda urna sia nera.

1° urna ○○○○●●●

2° urna ○○○●●●●●

B_1 : la pallina estratta dalla 1° urna è bianca

$$P(B_1) = \frac{4}{7}$$

N_1 : la pallina estratta dalla 1° urna è nera

$$P(N_1) = P(B_1^c) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

A seconda del realizzarsi di B_1 o N_1 cambia la composizione della 2° urna

se accade B_1 la 2° urna diventa

○ ○ ○ ○ ● ● ● ● ●

aggiunta dalla 1° urna

N_2 = si estrae una pallina nera dalla 2° urna

$P(N_2 | B_1) = \frac{5}{9}$

Se invece si verifica N_1 allora la 2° urna diventa

dalla 1° urna

○ ○ ○ ● ● ● ● ● ●

$$P(N_2 | N_1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Il testo richiede di calcolare $P(N_2)$

Legge delle prob. totale

$$P(N_2) = P(B_1) P(N_2 | B_1) + P(N_1) P(N_2 | N_1) =$$

$$= \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{9} + \frac{\cancel{3}}{7} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} = \frac{20}{63} + \frac{2}{7} = \frac{20+18}{63}$$

$$= \frac{38}{63}$$

(b) Se la pallina estratta dalla seconda urna è nera, è più probabile che la pallina estratta dalla prima urna fosse bianca o nera?

$$P(B_1 | N_2) = ? \quad P(N_1 | N_2) = ?$$

$$P(B_1 | N_2) = \frac{P(B_1 N_2)}{P(N_2)} =$$

già- [illegible]

$$= \frac{P(B_1) P(N_2 | B_1)}{P(N_2)} = \frac{\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{9}}{\frac{38}{63}} = \frac{\frac{20}{63}}{\frac{38}{63}} =$$

$$= \frac{20}{38} = \frac{10}{19}$$

$$P(N_1 | N_2) = \frac{P(N_1 N_2)}{P(N_2)} = \text{-----} \quad \text{Bayes}$$

Oppure:

$$P(N_1 | N_2) = P(B_1^c | N_2) =$$

$$= 1 - P(B_1 | N_2) = 1 - \frac{10}{19} = \frac{19-10}{19}$$

$$= \frac{9}{19}$$

$$P(N_1 \mid N_2) = \frac{9}{19} < \frac{10}{19} = P(B_1 \mid N_2)$$