CdP-TdD-XXIII-11/11/2006

Titolo nota

c) $P(X=10) = ?$

$$P(X=n) = (1-p)^{n-1}\,p$$

$$P(X=10) = \left(1-\frac{1}{100}\right)^{10-1} \cdot \frac{1}{100} = \left(\frac{99}{100}\right)^{9} \cdot \frac{1}{100}$$

$$\simeq 0.009$$

d) $P(X>150) = P\left(\{X=151\} \cup \{X=152\} \cup \dots\right)$

$$= P(X=151) + P(X=152) + \dots$$

$$= \sum_{n=151}^{+\infty} P(X=n)$$

SCORCIATOIA

$\{X > 150\}$ = le prime 150 prove sono state un insuccesso

$$\{X > 150\} = I_1 I_2 I_3 \cdots I_{150}$$

$$P(X > 150) = P(I_1 I_2 I_3 \cdots I_{150}) \overset{\text{indip}}{=}$$

$$P(I_1) P(I_2) P(I_3) \cdots P(I_{150}) =$$

$$\underbrace{(1-p)(1-p)(1-p) \cdots (1-p)}_{150 \text{ volte}} = (1-p)^{150}$$

nell'esempio $p = \frac{1}{100}$

$$P(X > 150) = (1-p)^{150} = \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{150} =$$

$$= \left(\frac{99}{100}\right)^{150} \simeq 0.221$$

Variabile Aleatoria con distribuzione di Poisson

$X \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

con densità discreta

$p(i) = P(X = i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$

$\lambda > 0$ è un parametro della distribuzione

$e \simeq 2.71$ (numero di Nepero)

Si scrive

$X \sim Po(\lambda)$

La v.a. di Poisson può essere derivata dalla v.a. binomiale

Se $X \sim Bin(n, p)$

Supponiamo che

$$n \to +\infty$$

$$p \to 0$$

In generale $np \to$ $(+\infty)\ 0$ forme indeterminata

Supponiamo infine che np rimanga costante

$$np = \lambda > 0$$

Ad esempio se $p = \frac{3}{n}$

$$np = n \cdot \frac{3}{n} = 3 = \lambda \text{ costante}$$

In queste ipotesi si può dimostrare che

$$P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \xrightarrow[np = \lambda]{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}}$$

$$\longrightarrow \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$$ densità di Poisson.

Quando vogliamo contare i successi in prove ripetute indipendenti e $p =$ "piccolo" (vicino a 0) $n =$ "elevato" allora la v.a. distribuita come una

Poisson di parametro $\lambda = np$ è una buona approssimazione della distribuzione esatta

Esempio 7b. Supponiamo che un pezzo prodotto da un macchinario sia difettoso con probabilità pari a 0.1. Si determini la probabilità che un insieme di 10 pezzi ne contenga al più uno difettoso.

Ogni pezzo è una prova indipendente

$P(\text{pezzo difettoso}) = P(\text{successo}) = 0.1 = \frac{1}{10}$

$X = \#$ pezzi difettosi nel lotto di 10

$X \sim Bin\left(10, \frac{1}{10}\right)$

Siamo interessati all'evento $X \leq 1$

$P(X \leq 1) = P(\{X=0\} \cup \{X=1\})$

disgiunti

$= P(X=0) + P(X=1)$

$P(X=0) = \binom{10}{0}\left(\frac{1}{10}\right)^0\left(\frac{9}{10}\right)^{10} = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{10} \simeq 0.349$

$P(X=1) = \binom{10}{1}\left(\frac{1}{10}\right)^1\left(\frac{9}{10}\right)^{9} = \cancel{10}\,\frac{1}{\cancel{10}}\left(\frac{9}{10}\right)^{9} \simeq 0.387$

$P(X \leq 1) \simeq 0.349 + 0.387 = 0.7358$

Per fare prima osservo che

$p = \frac{1}{10}$ "vicino a 0"

$n = 10$ "elevato"

Approssimo X con $Y \sim Po(\lambda)$

dove $\lambda = np = 10 \frac{1}{10} = 1$

Allora $P(X \leq 1) \simeq P(Y \leq 1) =$

$= P(Y=0) + P(Y=1) =$

$$\left(P(Y=i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \overset{(\lambda=1)}{=} \frac{e^{-1} 1^i}{i!} = \frac{\frac{1}{e}}{i!} = \frac{1}{e \cdot i!} \right)$$

$= \frac{1}{e\, 0!} + \frac{1}{e\, 1!} = \frac{1}{e} + \frac{1}{e} = \frac{2}{e} \simeq 0.7356$

0.7356 è una buona approssimazione di 0.7358

La v.a. di Poisson è utile per descrivere dei fenomeni rari.

1. Il numero di errori di stampa in una pagina (o un gruppo di pagine) di un libro;
2. Il numero di persone ultracentenarie di una comunità;
3. Il numero di numeri di telefono sbagliati chiamati in un giorno;
4. Il numero di pacchi di biscotti per cani venduti in un supermercato in un particolare giorno;
5. Il numero di clienti che entrano in un ufficio postale in un determinato giorno; (ufficio poco frequentato)
6. Il numero di posti di professore banditi ogni anno in Italia per un particolare settore scientifico disciplinare;
7. Il numero di particelle α emesse da un materiale radioattivo in un periodo di tempo fissato.

Esempio 7a. Supponiamo che il numero di errori tipografici di una singola pagina di questo libro abbia ~~un~~ una distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = \frac{1}{2}$. Si calcoli la probabilità che ci sia almeno un errore in questa pagina.

$X = \#$ errori nella pagina

$$X \sim Po\left(\frac{1}{2}\right) \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

almeno un errore $\iff X \geq 1$

$$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + \dots$$

SCORCIATOIA

$$X \geq 1 = (X=0)^c$$

non è vero che non ci sono errori di stampa.

$$P(X \geq 1) = P(\{X=0\}^c) = 1 - P(X=0)$$

$$P(X=0) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} \overset{(\lambda = \frac{1}{2})}{=} \frac{e^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^0}{0!}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \simeq \frac{1}{\sqrt{2.71}} \simeq 0.607$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) \simeq 1 - 0.607 = 0.393$$