Esercizi del corso di calcolo delle probabilità — foglio 5

a.a. 2008-2009 – 12/11/2008

Docente: Marco Dall'Aglio

1. Sia X il numero di ore che Giacomino dedica alla tv. X ha la seguente densità
$$p(x) = \begin{cases} 0.1 & \text{se } x = 0 \\ kx & \text{se } x = 1 \text{ o } x = 2 \\ k(6-x) & \text{se } x = 3 \text{ o } x = 4 \end{cases}$$
dove k è una costante.
   (a) Determinare k in modo che $p(x)$ sia una densità discreta
   (b) Rappresentare graficamente $p(x)$
   (c) trovare e rappresentare graficamente la funzione di distribuzione $F(x)$
   (d) Trovare $P(X \geq 3)$

2. La funzione di distribuzione della variabile aleatoria X è definita da
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1/2 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 2/3 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 11/12 & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{se } 3 \leq X \end{cases}$$
   (a) Disegnare la funzione di distribuzione;
   (b) Quanto vale $P(X \leq 2)$?
   (c) Determinare la densità discreta di X
   (d) Trovare la media e la varianza di X

3. Un tavolo quadrato è ricoperto da nove piastrelle, anch'esse quadrate, aventi costi differenti. Precisamente, le quattro piastrelle situate agli angoli costano 3 euro ciascuna, mentre tutte le altre 2 euro ciascuna. Se ne rompono due a caso. Trovare la densità discreta della v.a. X = "costo totale del danno subito". Calcolare $E(X)$.

4. Sia data una v.a. Z con valore atteso e varianza rispettivamente pari a 100 e 25. Calcolare
   (a) $E(Z^2)$

(b) $Var(2Z+100)$

(c) $\sigma(2Z+100)$ (σ è la deviazione standard)

(d) $E(-Z)$

(e) $Var(-Z)$

(f) $\sigma(-Z)$

5. Una moneta è truccata. Le due facce cadono con probabilità $P(T) = 3/8$ e $P(C) = 5/8$. La moneta è lanciata fino a che appaiono una testa o tre croci. L'esito di ogni lancio è indipendente dagli altri

   (a) Descrivere uno spazio campionario appropriato ed assegnare la probabilità ad ogni esito campionario.

   (b) Indichiamo con X il numero di lanci compiuti. Trovare la distribuzione e la funzione di distribuzione di X.

   (c) Rappresentare graficamente la densità e la funzione di distribuzione.

6. Enrico deve mettere quattro lettere in quattro buste con l'indirizzo. Se le mette a caso, determinare la distribuzione della v.a. $X =$"numero di lettere nella busta giusta". Calcolare $E(X)$, $\mathrm{Var}(X)$. Enrico riceve 10 euro per ogni lettera imbustata correttamente ed arrivata a destinazione (mentre non riceve niente per le lettere nelle buste sbagliate). Calcolare valore atteso e varianza del guadagno di Enrico.

7. Un gioco fra due controparti è detto **equo** se il valore atteso del guadagno per entrambe le parti è nullo.

   (a) Supponiamo che Tom e Jerry lancino un dado e Tom paghi 5 dollari a Jerry nel caso il punteggio sia minore di 3. Quanto dovrebbe pagare Jerry (a Tom) se il punteggio è almeno pari a 3 affinché il gioco risulti equo?

   (b) Come cambia la risposta se, nel caso il dado sia 3, non avviene nessun pagamento?

8. (Es. 4.25 e 4.26 da Antonelli-Regoli) Il condomino Rossi della porta accanto è un accanito giocatore del lotto ed ha deciso di giocare sulla ruota di Torino il numero 13 fino a quando non esce fra i cinque numeri estratti. Sia X il numero di giocate del Sig. Rossi.

   (a) trovare la distribuzione di X

   (b) Calcolare $P(X = 10)$ e $P(X > 10)$

(c) Calcolare la media e la varianza di X

(d) Il Sig. Rossi punta 10 euro ogni volta e vince 100 euro se esce il 13. Qual è il suo guadagno atteso? E la varianza di tale guadagno?

9. (Epifani)La probabilità di vincere giocando ad una slot machine è $p = 0.1$.

   (a) Se si effettuano 10 giocate, qual è la probabilità di vincere 6 volte?

   (b) Se si continua a giocare finché non si vince, qual è la probabilità di ottenere la prima vittoria alla decima giocata?

   (c) Se sulle prime cinque giocate non si è riportata nessuna vittoria, qual è la probabilità che si vinca alla sesta giocata?

10. Giovanni deve sottoporsi ad un esame e può scegliere fra due diverse procedure:

   - Nel primo test viene sottoposto a 5 domande a risposta chiusa, in ciascuna delle quali deve scegliere la risposta corretta fra tre disponibili. Il test viene superato se risponde ad almeno 2 domande in modo corretto
   - Nel secondo test viene sottoposto ad una prima domanda nella quale deve scegliere fra tre alternative. Se indovina passa il test, altrimenti viene sottoposto ad una seconda domanda con tre alternative. Ancora una volta se indovina il test finisce, altrimenti si continua con una terza domanda e così via fino a quando viene data la prima risposta corretta. Il test si conclude con successo se viene data la prima risposta corretta entro le prime tre domande. Si assume che il test continui comunque fino alla prima risposta esatta.

   Supponendo che Giovanni sia totalmente impreparato e che risponda casualmente ad ogni quesito, e che gli esiti di ogni quesito siano fra loro indipendenti si indichi con

$$X = \text{ numero di risposte esatte nel primo test}$$
$$Y = \text{ posizione della prima risposta esatta nel secondo test}$$

   (a) Indicare se X e Y seguono qualche distribuzione discreta conosciuta;

   (b) Calcolare $E(X)$, $E(Y)$, $\text{Var}(X)$ e $\text{Var}(Y)$

(c) Calcolare, in termini rispettivamente di X e Y, la probabilità che Giovanni superi i due test. Quale test conviene scegliere a Giovanni?

11. Partecipi ad una scommessa con due tuoi amici per stabilire chi pagherà il caffè. Ognuno di voi lancia una moneta. Nel caso appaiano sia teste che croci, paga quello che risulta "spaiato" (ad esempio se tu sei l'unico ad avere testa mentre gli altri hanno due croci). Nel caso tutti e tre avete lo stesso esito, la scommessa viene ripetuta.

    (a) Trovare la probabilità che siano necessarie meno di quattro ripetizioni per concludere la scommessa;

    (b) Quante ripetizioni ci dobbiamo attendere per decidere chi pagherà il caffè?

12. (Epifani) Se partecipo a 180 concorsi diversi (e indipendenti), in ciascuno dei quali si vince un solo premio e per ciascuno dei quali la probabilità di vincere il premio è 0.008, quanto vale (approssimativamente) la probabilità;

    (a) di vincere il premio di un solo concorso;

    (b) di vincere almeno un premio;

    (c) di vincere 30 premi

13. (Antonelli, Regoli) Bortkiewicz nel 1898 pubblicò il numero di morti per calci di cavallo tra i soldati di 14 armate della cavalleria prussiana nei 20 anni dal 1875 al 1895. I dati furono registrati armata per armata con cadenza annuale. Le frequenze riscontrate nelle 280 osservazioni furono le seguenti:

N. di morti	0	1	2	3	4	5 o più
Frequenza	144	91	32	11	2	0

    Sia X = numero di morti nel periodo indicato. Se X è una variabile di Poisson con la stessa media dei dati, quali di queste frequenze si discosta di più dalla probabilità?

14. Una macchina produce accendini e ciascun pezzo prodotto ha probabilità $5/6$ di essere funzionante, indipendentemente dagli altri pezzi.

    (a) Sono stati prodotti 6 pezzi. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi

- $A =$ tutti i 6 pezzi sono funzionanti;
- $B =$ esattamente 5 pezzi sono funzionanti;
- $C =$ almeno uno dei 6 pezzi è difettoso

(b) Sapendo che nei primi 6 almeno un pezzo risulta difettoso, calcolare la probabilità che esattamente 4 di questi pezzi siano funzionanti.

15. Per verificare l'efficacia di un diserbante una ditta produttrice confronta il proprio diserbante A con quello B della concorrenza. I prodotti sono provati in coppie di appezzamenti identici. Si assume che i confronti fra le coppie di appezzamente siano indipendenti. Inoltre si assume che da ogni confronto emerga un trattamento migliore (è escluso il pareggio). Si vogliono verificare due ipotesi:

    Ipotesi a) I due diserbanti hanno uguale efficacia

    Ipotesi b) A è due volte più efficace di B

    Inizialmente il ricercatore incaricato dello studio dà uguale credito alle due ipotesi. I due prodotti vengono confrontati in 5 coppie di appezzamenti ad A risulta migliore di B 4 volte.

    (a) Si verifichi che il fenomeno è descrivibile mediante una v.a. binomiale;
    (b) Calcolare la probabilità dell'evento verificatosi sotto le due ipotesi;
    (c) Utilizzando il teorema di Bayes esaminare come cambia il grado di fiducia nelle due ipotesi;
    (d) Come cambia la valutazione del punto precedente se il confronto viene fatto su 10 coppie e il prodotto A risulta migliore 8 volte?

Domande

1. Scegliere l'unica risposta vera fra le quattro disponibili (a,b,c,d), motivando la risposta

    (a) Siano A e B eventi con $A \cap B = \emptyset$, $0 < P(A) < 1$ e $0 < P(B) < 1$, allora

    $a)$ A e B sono indipendenti $\quad b)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

    $c)$ può accadere che $P(A \cup B) = 0 \quad d)$ $P(A|B) = P(A)$

(b) Se X è una variabile aleatoria geometrica di parametro $p = 1/4$

$$a) Var(X) = 4 \qquad b) E(X) = 4 \qquad c) X \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$
$$d) P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = P(X = 4)$$

2. La variabile aleatoria discreta X ha funzione di distribuzione $F_X(x)$, allora:

   (a) $F_X(x)$ non è necessariamente definita per ogni valore di x

   (b) $F_X(x)$ non decresce al crescere di x;

   (c) $F_X(x) < 0$ se $x < 0$

   (d) da F_X possiamo ricavare la densità discreta di X

3. Il seguente testo di esercizio contiene un errore. Individuatelo:

   > Siano A e B due eventi incompatibili ed indipendenti. Sapendo che $P(A \cup B) = 0.7$ e $P(A \cap B) = 0.12$, determinare $P(A)$ e $P(B)$.

   Una volta risolto l'errore, siete in grado di risolvere l'esercizio?

4. Dire se le seguenti situazioni sono descrivibili mediante una distribuzione binomiale e giustificare la risposta. In caso affermativo, indicare i parametri della binomiale.

   (a) Il numero di "1" usciti in 25 lanci di un dado;

   (b) Il numero di ragazzi in una famiglia con 4 figli;

   (c) Il numero di sequenze consecutive di 3 teste in 10 lanci di una moneta bilanciata.